Dr. Rasiman, M. Pd. | Maya Rini Rubowo, S. Pd., M. Si.

Agnita Siska Pramasdyahsari, M. Pd., M. Sc.

# TEORI RING

UNIV. PGRI
SEMARANG
PRESS

# KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat dan hidayahNya, sehingga kami bisa menyelesaikan penyusunan bahan ajar ini. Bahan ajar berjudul “TEORI RING”.

Pengkajian tiap materi bahasan didasarkan pada satu atau lebih indikator. Urutan dalam pengkajian materi bahasan lebih dititik beratkan pada keterkaitan antar materi bahasan yang satu dengan materi bahasan yang berikutnya. Dengan urutan pengkajian materi bahasan semacam ini akan memudahkan dalam proses belajar. Tiap materi dalam bahan ajar ini disusun secara sistematis dengan mengelompokkan menjadi beberapa komponen yang saling berkaitan. Tujuannya adalah agar target pencapaian dalam kompetensi dasar dapat terpenuhi.

Kami menyadari sepenuhnya bahwa bahan ajar ini masih belum sempurna. Oleh karena itu kritik dan saran yang ada relevansinya dengan bahan ajar ini sangat kami harapkan. Kritik dan saran sekecil apapun akan kami perhatikan dan pertimbangkan guna penyempurnaan bahan ajar berikutnya.

Pada kesempatan kali ini kami mengucapkan terimakasih kepada seluruh pihak yang telah mendukung dan membantu dalam menyelesaikan bahan ajar ini ini. Semoga bahan ajar ini dapat memberikan manfaat dan memberikan nilai tambah kepada para pembaca khususnya bagi mahasiswa.

Semarang, Maret 2018

**Penyusun**

# DAFTAR ISI

# BAB 1

# RING

# BAB 1
# RING

**Definisi 1**

Misal R adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua buah operasi yakni + (operasi penjumlahan) dan . (operasi perkalian), selanjutnya dilambangkan dengan (R, +, .). Struktur (R, +, .) dinamakan ring , jika memenuhi aksioma :

a. ( R,+) grup abelian
   i. Tertutup, yakni $\forall a, b \in R, a + b \in R$
   ii. Assosiatif, yakni $\forall a, b, c \in R, (a + b) + c = a + (b + c)$
   iii. Terdapat elemen identitas, yakni $\exists e \in R, \forall a \in R, a + e = e + a = a$
   iv. Setiap elemen punya invers, yakni $\forall a \in R, \exists a^{-1} \in R, a + a^{-1} = a^{-1} + a = e$

      Untuk selanjutnya $a^{-1}$ dinamakan invers dari $a$.
   v. Komutatif , yakni $\forall a, b \in R, a + b = b + a$

b. ( R, . ) semigrup
   i. Tertutup, yakni $\forall a, b \in R, a . b \in R$
   ii. Assosiatif, yakni $\forall a, b, c \in R, (a . b). c = a . (b . c)$

c. Sifat distributif kiri dan distributif kanan, yakni : $\forall a, b, c \in R,$
   i. $a . (b + c) = (a . b) + (a . c)$
   ii. $(a + b). c = (a . c) + (b . c)$

**Definisi 2**

Misal R adalah ring yang mempunyai elemen identitas terhadap operasi perkalian (misal dinotasikan $e_1$ ). Untuk selanjutnya elemen identitas terhadap operasi perkalian ( $e_1$ ) dinamakan sebagai elemen satuan.

Untuk lebih lanjut, ring R yang memuat elemen satuan dinamakan sebagai Ring dengan elemen satuan.

**Definisi 3**

Ring R dikatakan sebagai ring komutatif jika operasi perkalian pada R bersifat komutatif.

**Contoh 1:**

1. Z = Himpunan semua bilangan bulat.

   Didefinisikan operasi pada Z seperti berikut :

   + adalah operasi penjumlahan biasa

- adalah operasi perkalian biasa.

(Z, + , . ) merupakan ring.

Bukti :

a. Ditunjukkan (Z, + ) grup abelian
   i. $\forall a, b \in Z, a + b \in Z$ …(sifat ketertutupan penjumlahan bilangan bulat)
   ii. $\forall a, b, c \in Z, (a + b) + c = a + (b + c)$, …(sifat assosiatif penjumlahan bilangan bulat)
   iii. $\exists e = 0 \in Z, \forall a \in Z$ , berlaku $a + 0 = 0 + a = a$

      Jadi 0 adalah elemen identitas pada Z
   iv. $\forall a \in Z, \exists a^{-1} = -a \in Z$ , berlaku $a + (-a) = (-a) + a = 0$

      Jadi setiap elemen di Z mempunyai invers terhadap operasi +
   v. $\forall a, b \in Z, a + b = b + a$…(sifat komutatif penjumlahan bilangan bulat)

   Dari a ( i, ii, iii, iv, dan v ), diperoleh ( Z, + ) grup abelian

b. Ditunjukkan ( Z , . ) semigrup
   i. $\forall a, b \in Z$ berlaku $a \,.\, b \in Z$…(sifat ketertutupan perkalian bilangan bulat)
   ii. $\forall a, b, c \in Z, (a \,.\, b).\, c = a \,.\, (b \,.\, c)$(sifat assosiatif perkalian bilangan bulat)

   Dari b ( i dan ii), diperoleh ( Z , . ) semigrup

c. Ditunjukkan berlaku sifat distributif kiri dan kanan $\forall a, b, c \in Z$,
   1) Distribusi kanan

      Ambil sebarang a, b, c $\in Z$,

      $a \,.\, (b + c) = (a \,.\, b) + (a \,.\, c)$
   2) Distribusi kiri

      Ambil sebarang a, b, c $\in Z$

$(a + b). c = (a . c) + (b . c)$

Dari c 1) dan 2) maka berlaku distributif

**Contoh 2:**

2. Tunjukan bahwa $Z_4$ adalah merupakan suatu Ring

| + | **0** | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 1 | 2 | 3 |
| **1** | 1 | 2 | 3 | 0 |
| **2** | 2 | 3 | 0 | 1 |
| **3** | 3 | 0 | 1 | 2 |

| . | **0** | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 |
| **2** | 0 | 2 | 0 | 2 |
| **3** | 0 | 3 | 2 | 1 |

Dari tabel di atas akan ditunjukan bahwa $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ merupakan suatu Ring bila memenuhi :

1. Grup Komutatif terhadap penjumlahan $(Z_4,+)$

- **Tertutup**

  Ambil sebarang nilai dari Z4, misalkan $0, 1, 2, 3 \in Z_4$

  maka $1 + 0 = 1$

  $1 + 1 = 2$

  $1 + 2 = 3$

  $1 + 3 = 0$

  karena hasilnya $0, 1, 2, 3 \in Z_4$, maka tertutup terhadap $Z_4$

- **Assosiatif**

  Ambil sebarang nilai dari $Z_4$, misalkan $a = 2$, $b = 1$ dan $c = 3 \in Z_4$

  maka $(a + b) + c = (2 + 1) + 3 = 3 + 3 = 2$

  $a + (b + c) = 2 + (1 + 4) = 2 + 4 = 2$

  Sehingga :

  $(a + b) + c = a + (b + c) = 2$

  maka $Z_4$ assosiatif

- **Adanya unsur satuan atau identitas**

  Ambil sebarang nilai dari $Z_4$

  misalkan $0 \in Z_4$

  $0 + e = e + 0 = 0$

  misalkan $1 \in Z_4$

  $1 + e = e + 1 = 1$

  misalkan $2 \in Z_4$

  $2 + e = e + 2 = 2$

  misalkan $3 \in Z_4$

  $3 + e = e + 3 = 3$

  maka Z4 ada unsur satuan atau identitas

- **Adanya unsur balikan atau invers**

  Ambil sebarang nilai dari Z4, misalkan $0 \in Z_4$, pilih $0 \in Z_4$,

  sehingga $0 + 0 = 0 = e$, maka $(0)^{-1} = 0$

  Ambil sebarang nilai dari Z4, misalkan $1 \in Z_4$, pilih $3 \in Z_4$,

  sehingga $1 + 3 = 0 = e$, maka $(1)^{-1} = 3$

  Ambil sebarang nilai dari Z4, misalkan $2 \in Z_4$, pilih $2 \in Z_4$,

  sehingga $2 + 2 = 0 = e$, maka $(2)^{-1} = 2$

  Ambil sebarang nilai dari Z4, misalkan $3 \in Z_4$, pilih $1 \in Z_4$,

  sehingga $3 + 1 = 0 = e$, maka $(3)^{-1} = 1$

  maka $Z_4$ ada unsur balikan atau invers

- **Komutatif**

  Ambil sebarang nilai dari $Z_4$, misalkan $a = 2$, $b = 3 \in Z_4$

  $(a + b) = (2 + 3) = 1$

  $(b + a) = (3 + 2) = 1$

  Sehingga :

  $(a + b) = (b + a) = 1$

  maka $Z_4$ komutatif

  Jadi, $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ merupakan Grup Komutatif terhadap penjumlahan $(Z_4, +)$.

2. Semigrup terhadap perkalian ($Z_4$,.)

- **Tertutup**

  Ambil sebarang nilai dari $Z_4$, misalkan 0, 1, 2, 3 ∈ $Z_4$

  1 . 0 = 0

  1 . 1 = 1

  1 . 2 = 2

  1 . 3 = 3

  karena hasilnya 0, 1, 2, 3 ∈ $Z_4$, maka tertutup terhadap $Z_4$

- **Assosiatif**

  Ambil sebarang nilai dari $Z_4$, misalkan a = 2, b = 1 dan c = 3 ∈ $Z_4$

  maka (a . b) . c = (2 . 1) . 3 = 2 . 3 = 2

  a . (b . c) = 2 . (1 . 3) = 2 . 3 = 2

  Sehingga :

  (a . b) . c = a . (b . c) = 2

  maka $Z_4$ assosiatif

  Jadi, $Z_4$ = {0, 1, 2, 3} merupakan Semigrup terhadap perkalian ($Z_4$, .)

3. Distributif perkalian terhadap penjumlahan

Ambil sebarang nilai dari $Z_4$, misalkan a = 2, b = 1 dan c = 3 ∈ $Z_4$

a.(b + c) = 2.(1 + 3)

= 2.(0)

= 0

(a.b) + (a.c) = (2.1) + (2.3)

= 2 + 6

= 0

Maka, a.(b + c) = (a.b) + (a.c) = 0

(a + b).c = (2 + 1).3

= (3).3

= 1

(a.c) + (b.c) = (2.3) + (1.3)

= 2 + 3

= 1

Maka, (a + b).c = (a.c) + (b.c) = 1

Jadi, $Z_4$ = {0, 1, 2, 3} distributif perkalian terhadap penjumlahan.

Karena $Z_4$ = {0, 1, 2, 3} memenuhi semua aksioma-aksioma yang ada, maka $Z_4$ adalah suatu Ring ($Z_4$,+,.).

**Contoh 3:**

M = $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ {a, b, c, ∈ $R$} yaitu himpunan semua matriks segitiga atas berorde 2 yang semua elemenya bilangan real. Tunjukan bahwa M dengan penjumlahan dan perkalian matriks adalah suatu ring.

**Penyelesaian :**

*Adt (M, +) = grup abelian*

1. Tertutup

Ambil sebarang A.B ∈ M dengan A = $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$ dimana a, b, c, d, e, f, ∈ R

Maka : A + B = $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a+d & b+e \\ 0 & c+f \end{bmatrix}$$

Karena a, b, c, d, e, f, ∈ R maka a + d ∈ R, b+c ∈ R, c+f ∈ R.

Sehingga $\begin{bmatrix} a+d & b+e \\ 0 & c+f \end{bmatrix} \in M$

Jadi A +B ∈ M

2. Assosiatif

Ambil sembarang A,B,C ∈ $M$ deng an A = $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$,

C = $\begin{bmatrix} g & h \\ 0 & j \end{bmatrix}$ dimana a, b, c, d, e, f, g, h, j ∈ R

Maka :

(A+B)+C = $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h \\ 0 & j \end{bmatrix} \right\}$

$$= \begin{bmatrix} a+d & b+e \\ 0 & c+f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h \\ 0 & j \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} (a+d)+g & (b+e)+h \\ 0 & (c+f)+j \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a+(d+g) & b+(e+h) \\ 0 & c+(f+j) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d+g & e+h \\ 0 & f+j \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h \\ 0 & j \end{bmatrix} \right\}$

(A+B)+C = A + (B + C)

3. Elemen identitas

Ambil sembarang A dengan A = $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ dengan a, b, c ∈ R

Misal : I = $\begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$ adalah el. Identitas dengan d, e, f ∈ R

Maka : A + I = A

$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a+d & b+e \\ 0 & c+f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$

Di dapat :

a + d = a

d = 0 ∈ R

b + e = b

e = 0 ∈ R

c + f = c

f = 0 ∈ R

jadi I = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ∈ M adalah el. Identitas

4. Invers

Ambil sembarang A dengan A = $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ dengan a, b, c ∈ R

Misal $A^{-1}$= $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ adalah invers A ∈ M

Karena : A + $A^{-1}$= I

$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & l \\ 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a+k & b+l \\ 0 & c+m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Didapat :

a + k = 0

k = -a ∈ R

b + l = 0

l = -b ∈ R

c + m = 0

m = -c ∈ R

jadi $A^{-1} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ 0 & -c \end{bmatrix}$ ∈ R adalah invers dari A

5. Komutatif

Ambil sembarang A.B ∈ M dengan A = $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$ dimana a, b, c, d, e, f, ∈ R

Maka :

A + B = $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} a+d & b+e \\ 0 & c+f \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} d+a & e+b \\ 0 & f+c \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$

A + B = B + A

*Adt (M,x) = semi grup*

6. Tertutup

Ambil sembarang A.B ∈ M dengan A = $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$ dimana a, b, c, d, e, f, ∈ R

Maka : A x B = $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} ad & be \\ 0 & cf \end{bmatrix}$

Karena a, b, c, d, e, f, ∈ R maka a.d ∈ R, b.c ∈ R, c.f ∈ R.

Sehingga $\begin{bmatrix} ad & be \\ 0 & cf \end{bmatrix} \in M$

Jadi A x B ∈ M

7. Assosiatif

Ambil sembarang A,B,C ∈ $M$ deng an A = $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ , B = $\begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$ , C = $\begin{bmatrix} g & h \\ 0 & j \end{bmatrix}$ dimana a, b, c, d, e, f,g, h, j ∈ R

Maka :

(AxB)xC = $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} \right\} x \begin{bmatrix} g & h \\ 0 & j \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ad & ae + bf \\ 0 & cf \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g & h \\ 0 & j \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (ad)g & (ad)h + (ae + bf)j \\ 0 & (cf)j \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (ad)g & adh + aej + bfj \\ 0 & (cf)j \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a(dg) & a(dh + ej) + b(fj) \\ 0 & c(fj) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} dg & dh + ej \\ 0 & fj \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g & h \\ 0 & j \end{bmatrix} \right\}$

$= A \times (B \times C)$

Jadi, $(M,\times)$ merupakan semigrup

*Distributif kiri dan kanan*

8. Distributif kiri

Ambil sebarang $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} g & h \\ 0 & j \end{bmatrix} \in M$

Dengan a, b, c, d, e, f, g, h, j ∈ R

Maka :

$(A + B) \times C = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} \right\} \times \begin{bmatrix} g & h \\ 0 & j \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a+d & b+e \\ 0 & c+f \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g & h \\ 0 & j \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+d)g & (a+d)h+(b+e)j \\ 0 & (c+f)j \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ag+dg & (ah+dh)+(bj+ej) \\ 0 & cj+fj \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ag+dg & (ah+bj)+(dh+ej) \\ 0 & cj+fj \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ag & ah+bj \\ 0 & cj \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dg & dh+ej \\ 0 & fj \end{bmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g & h \\ 0 & j \end{bmatrix} \right\} + \left\{ \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g & h \\ 0 & j \end{bmatrix} \right\}$$

$$(A+B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$$

9. Distfributif kanan

Ambil sebarang $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} g & h \\ 0 & j \end{bmatrix} \in M$

Dengan a, b, c, d, e, f, g, h, j ∈ R

Maka :

$$A \times (B + C) = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h \\ 0 & j \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d+g & e+h \\ 0 & f+j \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a(d+g) & a(e+h)+b(f+j) \\ 0 & c(f+j) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ad+ag & (ae+ah)+(bf+bj) \\ 0 & cf+cj \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ad+ag & (ae+bf)+(ah+bj) \\ 0 & cf+cj \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ad & ae+bf) \\ 0 & cf \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ag & ah+bj) \\ 0 & cj \end{bmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} \right\} + \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g & h \\ 0 & j \end{bmatrix} \right\}$$

$$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$$

Karena 1) – 9) terpenuhi maka (R, +, x) adalah Ring.

**Contoh 4:**

Misalkan R = { -1, 1}, Buktikan (R, +,.) apakah merupakan ring ?

Penyelesaian :

Adb (R,+) adalah grup abelian

a). Tertutup

Diketahui -1, 1 $\in R$

Maka -1 + 1 = 0 $\notin R$

Jadi (R,+) tidak memenuhi sifat tertutup.

Sehingga, (R, +,.) bukan merupakan ring.

# BAB 2

# SIFAT – SIFAT RING

## BAB 2

## SIFAT-SIFAT RING

Misalkan R suatu ring dengan operasi-operasi penjumlahan dan perkalian.

- Elemen identitas terhadap penjumlahan disebut **elemen nol**.
- Elemen identitas terhadap perkalian (jika ada) disebut elemen kesatuan dan diberi simbol u.
- Invers penjumlahan dari $a \in R$ ditulis $-a$ dan invers perkalian dari $a \in R$ (jika ada) ditulis $a^{-1}$.

Karena (R, +) suatu Ring, maka (R, +) suatu grup komutatif sehingga semua sifat yang berlaku dalam grup aditif (penjumlahan) berlaku pula dalam ring,
misalnya invers dari invers $a \in R$ adalah a, ditulis

$$-(-a) = a \ \forall\ a \in R.$$

Begitu pula $\quad -(a + b) = (-a) + (-b),\ \forall\ a, b \in R.$

Oleh karena itu, sifat-sifat dapat digunakan dalam ring, sifat-sifat yang akan kita pelajari di sini, terutama sifat-sifat yang berkaitan dengan operasi perkalian.

**Teorema 2.1**

Jika R suatu Ring, maka:

(i) $a \,.\, 0 = 0 \,.\, a = 0,\ \forall\ a \in R$

(ii) $a(-b) = (-a)b = -(ab),\ \forall\ a, b \in R$

(iii) $(-a)(-b) = ab,\ \forall\ a, b \in R$

(iv) $a(b - c) = ab - ac$ dan $(a - b)c = ac - ab,\ \forall\ a, b, c \in R$

**Contoh:**

Jika $a, b, c, d \in R$ suatu Ring maka:

| | |
|---|---|
| $(a - b)(c + d) = (a - b)c + (a - b)d$ | sifat distributif kanan |
| $= ac - bc + ad - bd$ | sifat distributif kiri |

**Definisi 2.1**

Misalkan R suatu ring dan suatu bilangan bulat positif, maka $\forall\ a \in R$ berlaku:

(i) $m\,a = a + a + a + \ldots + a$ sebanyak m suku

(ii) (-m) a = m (-a) = (-a) + (-a) + … + (-a) sebanyak m suku

= -(a + a + a + … + a)

= -(ma)

(iii) 0 a = z (elemen nol dari Ring R)

Dari definisi 2.1 dapat diturunkan bahwa apabila R suatu Ring, m dan n bilangan-bilangan bulat positif, maka (m + n) a = ma + na, ∀ a ∈ R

Hal ini dibuktikan sebagai berikut

$$ma + na = \underbrace{(a + a + a + ... + a)}_{\text{m suku}} + \underbrace{(a + a + a + ... + a)}_{\text{n suku}}$$

$$= \underbrace{(a + a + a + ... + a)}_{\text{m+n suku}}$$

= (m + n) a

Apabila m suatu bilangan bulat positif dan n suatu bilangan bulat negatif dengan m < |n|, berlaku (m + n) a = ma + na ?

Misalkan n = -t dengan t suatu bilangan bulat positif, maka

ma + na = ma + (-t) a

= ma + t (-a)

$$= \underbrace{(a + a + a + ... + a)}_{\text{m suku}} + \underbrace{((-a) + (-a) + (-a) + ... + (-a))}_{\text{t suku}}$$

$$= \underbrace{(a + a + a + ... + a)}_{(m-1)\text{ suku}} + (a + (-a)) + \underbrace{((-a) + ... + (-a))}_{(t-1)\text{ suku}}$$

= a + a + ... + a + z + (-a) + (-a) + ... + (-a)

$$= \underbrace{a + a + \ldots + a}_{(m = 2)\text{ suku}} + (a + (-a)) + \underbrace{(-a) + \ldots + (-a)}_{(t = 1)\text{ suku}}$$

Dan seterusnya, karena m < 1, maka

$$= \underbrace{(-a) + (-a) + \ldots.. + (a)}_{(-m+1)\text{suku}}$$

= (-m + t) (-a)

= -(-m + t) a

= (m – t) a, karena –t = n, maka

= (m + n) a

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa jika R suatu ring. m dan n keduanya bilangan bulat, maka (m + n) a = ma + na ∀ a ∈ R

Selanjutnya, jika R suatu ring, m dan n bilangan-bilangan bulat,

maka m (n.a) = (m.n) a.

Hal ini dibuktikan untuk kemungkinan-kemungkinan yang terjadi dari bilangan-bilangan bulat m dan n. Yaitu:

(1) jika keduanya positif,

(2) jika salah satu positif dan lainnya negatif,

(3) jika salah satu atau keduanya nol.

Jika m dan n keduanya bilangan positif, maka

m (na) = $\underbrace{\text{na} + \text{na} + \text{na} + \ldots . + \text{na}}_{\text{m suku}}$

=$\underbrace{(\text{n} + \text{n} + \ldots + \text{n})}_{\text{m suku}}$ a , ingat bahwa ma + na = (m+ n) a

= (mn) a

**Teorema 2.2**

Jika R suatu Ring , m dan n keduanya bilangan bulat, maka

(i) (m + n) a = ma + na, ∀ a ∈ R

(ii) m (a + b ) = ma + mb, ∀ a, b ∈ R

(iii) m (na) = (mn) a, ∀ a ∈ R

**Contoh**

H = {0, 2, 4, 6, 8} dengan penjumlahan mod 10 dan perkalian mod 10 adalah suatu Ring.

| + | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 0 |
| 4 | 4 | 6 | 8 | 0 | 2 |
| 6 | 6 | 8 | 0 | 2 | 4 |
| 8 | 8 | 0 | 2 | 4 | 6 |

| X | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 4 | 8 | 2 | 6 |
| 4 | 0 | 8 | 6 | 4 | 2 |
| 6 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| 8 | 0 | 6 | 2 | 8 | 4 |

1. (2 + 4) . 6 = 2 . 6 + 4 . 6

   6 . 6 = 2 + 4

   6 = 6
2. 8 . (2 + 6) = 8.2 + 8.6

   8 . 8 = 6 + 8

   4 = 4
3. 0 (4.2) = (0.4) 2

   0 . 8 = 0 . 2

   0 = 0

Misalkan R suatu ring dan m suatu bilangan bulat positif, maka $\forall$ a $\in$ R didefinisikan $a^m$ = a . a . a . ... . a sebanyak m faktor

Karena dalam suatu ring, invers perkalian dari suatu elemen tidak perlu ada, maka $a^m$ tidak dapat didefinisikan untuk bilangan bulat negatif m. Demikian pula, karena dalam suatu Ring, elemen kesatuan tidak perlu ada, maka $a^m$ tidak dapat didefinisikan.

Dari definisi di atas dapat diturunkan bahwa jika R suatu Ring, sedangkan m dan n keduanya bilangan bulat positif, maka

(i) $a^m . a^n = a^{m+n}$ dan

(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$, $\forall$ a $\in$ R

Pernyataan-pernyataan ini dapat dibuktikan sebagai berikut.

(i) $a^m \,.\, a^n = \underbrace{(a\,.\,a\,.\,a\,. \ldots .\,a)}_{\text{m faktor}} \; \underbrace{(a\,.\,a.\,a\,. \ldots .\,a)}_{\text{n faktor}}$

$= \underbrace{a\,.\,a\,.\,a\,. \ldots .\,a}_{\text{(m+ n) faktor}}$

$= a^{m+n}$

(ii) $(a^m)^n = \underbrace{a^m . a^m . a^m . \ldots . a^m}_{\text{n faktor}}$ mengingat (1) diatas, maka

$= a^{\underbrace{m+m+m+\cdots+m}_{\text{n suku}}}$

$= a^{mn}$

Perhatikan bahwa apabila R suatu Ring, m suatu bilangan bulat positif dan a ∈ R, mengingat sifat tertutup terhadap perkalian, maka $a^m$ ∈ R pula.

**Definisi 2.2**

i. a ∈ R ∋ $a^2$ = a → a = elemen idempoten
ii. b ∈ R, ∃ n ∈ $B^+$ ∋ $b^n$ = 0 → b = elemen nilpoten

**Contoh**

H = {0,1,2,3,4,5} terhadap penjumlahan mod 6 dan perkalian mod 6 adalah suatu ring.

| + | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 0 | 2 | 4 |
| 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 |
| 4 | 0 | 4 | 2 | 0 | 4 | 2 |
| 5 | 0 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

el. Kesatuan = 1

jadi, ( H, +6, x6) = ring komutatif dengan elemen kesatuan 1

- ❖ Elemen idempoten ?
  - $0 \in H \rightarrow 0^2 = 0 \rightarrow$ el.idempoten
  - $1 \in H \rightarrow 1^2 = 1 \rightarrow$ el. Idempoten
  - $2 \in H \rightarrow 2^2 = 4 \rightarrow$ bukan
  - $3 \in H \rightarrow 3^2 = 3 \rightarrow$ el. Idempoten
  - $4 \in H \rightarrow 4^2 = 4 \rightarrow$ el. Idempoten
  - $5 \in H \rightarrow 5^2 = 1 \rightarrow$ bukan

  Elemen idompoten dalam H = {0,1,3,4}

- ❖ Elemen nilpoten ?
  - $0 \in H$

    $0^1 = 0$

    $0^2 = 0$

    $0^3 = 0$

    0 = elemen nilpoten
  - $1 \in H$

    $1^1 = 1$

    $1^2 = 1$

    $1^3 = 1$

    1 = bukan elemen nilpoten
  - $2 \in H$

    $2^1 = 2$

    $2^2 = 4$

    $2^3 = 2$

    $2^4 = 4$

    Bukan elemen nilpoten
  - $3 \in H$

    $3^1 = 3$

$3^2 = 3$

$3^3 = 3$

3 = Bukan elemen nilpoten

- $4 \in H$

  $4^1 = 4$

  $4^2 = 4$

  $4^3 = 4$

  4 = bukan elemen nilpoten

- $5 \in H$

  $5^1 = 5$

  $5^2 = 1$

  $5^3 = 5$

  $5^4 = 1$

  Bukan elemen nilpoten

  Jadi, elemen nilpoten dalam H = {0}

  Kesimpulan :

  Dalam setiap ring, elemen nol nya merupakan elemen idempoten dan sekaligus debagai elemen nilpoten.

**Definisi 2.3**

i. $a \in R$ dan $b \in R$, $b \neq 0$

   $\ni a.b = 0 \rightarrow a$ = elemen pembagi nol kiri

ii. $a \in R$ dan $b \in R$, $b \neq 0$

   $\ni b.a = 0 \rightarrow a$ = elemen pembagi nol kanan

iii. $a \in R$ dan $b \in R$, $b \neq 0$

   $\ni a.b = b.a = 0 \rightarrow a$ = elemen pembagi nol

iv. $a \in R$ ; $a \neq 0$ dan $b \in R$, $b \neq 0$

   $\ni ab = ba = 0 \rightarrow a$ = elemen pembagi nol sejati (pns)

Dari definisi ini jelas bahwa dalam setiap Ring, elemen nolnya merupakan elemen pembagi nol, tetapi elemen nol tidak merupakan elemen pembagi nol sejati.

Atau dapat pula dikatakan :

R tidak memuat pns jika dan hanya jika $\forall a, b \in R$, jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ maka $ab \neq 0$ .

**<u>Contoh</u>**

H = {0,1,2,3,4,5}

(H, $+_6$, $x_6$) merupakan Ring

- $0 \in H$ dan $1 \in H$, $1 \neq 0$

  0 . 1 = 0 → elemen pembagi nol kiri

  1 . 0 = 0 → elemen pembagi nol kanan

- $1 \in H$ dan $2 \in H$, $2 \neq 0$

  1. 2 = 2 → bukan pembagi nol

  2 . 1 = 2 → bukan pembagi nol

- $2 \in H$ dan $3 \in H$, $3 \neq 0$

  2.3 = 0 → 2 = elemen pembagi nol kiri

  3.2 = 0 → 2 = elemen pembagi nol kanan

- $3 \in H$ dan $2 \in H$, $2 \neq 0$

  3.2 = 0 → 3 = elemen pembagi nol kiri

  2.3 = 0 → 3 = elemen pembagi nol kanan

- $3 \in H$ dan $4 \in H$, $4 \neq 0$

  3.4 = 0 → 3 = elemen pembagi nol kiri

  4.3 = 0 → 3 = elemen pembagi nol kanan

- $4 \in H$ dan $3 \in H$, $3 \neq 0$

  4.3 = 0 → 4 = elemen pembagi nol kiri

  3.4 = 0 → 4 = elemen pembagi nol kanan

- $5 \in H$ dan $2 \in H$, $2 \neq 0$

  5.2 = 4 → 5 = bukan

  2.5 = 4 → 5 = bukan

- $5 \in H$ dan $2 \in H$, $2 \neq 0$

  3.5 = 3 → 5 = bukan

  5.3 = 3 → 5 = bukan

Jadi :

Elemen pembagi nol kiri dalam H = {0,2,3,4}

Elemen pembagi nol kanan dalam H = {0,2,3,4}

Elemen pembagi nol = {0,2,3,4}

Elemen pembagi nol sejati {2,3,4}

Kesimpulan :

Elemen nol selalu merupakan elemen pembagi nol tapi bukan merupakan elemen pembagi nol sejati.

**Contoh**

$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c \text{ bilangan} - \text{bilangan real} \right\}$ terdapat penjumlahan dan perkalian matriks merupakan suatu Ring. Misalkan $A, B, C \in M$ dengan C bukan elemen nol dari M sedemikian hingga $AC = BC$, apakah dapat disimpulkan bahwa $A = B$?

Pilihlah, misalnya $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & v \end{pmatrix}$

Maka $AC = BC$. Nampak jelas bahwa $A \neq B$

Contoh ini menunjukkan bahwa dalam suatu Ring tidak berlaku sifat pelenyapan (kanselasi) kanan. Demikian pula, misalkan dipilih

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, \text{dan } C = \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix}$

Maka $CA = CB$. Nampak bahwa $A \neq B$

Hal ini menunjukkan bahwa dalam suatu Ring tidak perlu bersifat pelenyapan (kanselasi) kiri. Dengan menunjukkan contoh ini dapat disimpulkan bahwa dalam suatu Ring tidak berlaku sifat pelenyapan. Tetapi dalam suatu Ring/ring yang tidak memuat pembagi nol sejati (pns) akan berlaku sifat pelenyapan. Hal ini dinyatakan sebagai teorema berikut ini.

**Teorema 2.3**

Suatu bilangan tidak memuat pembagi nol sejati (pns) jika dan hanya jika dalam Ring tersebut berlaku sifat pelenyapan.

Bukti : Misalkan R suatu Ring

(i) Harus dibuktikan : R tidak memuat pns →sifat pelenyapan dipenuhi.

Ambil $a, b, c \in R$ dengan 0 sedemikian hingga $ab = ac$, maka $ab - ac = ac - ac$

ab – ac = 0 → dengan sifat distributive kanan, maka

a (b – c) →karena a ≠ 0 dan R tidak memuat pns, maka

b – c = 0

$b = c$

Selanjutnya, jika $a, b, c \in R$ dengan a ≠ 0 sedemikian hingga $ba = ca$, maka:

ba – ca = 0 → karena sifat distributif kiri, maka

(b – c) a = 0 → karena 0 dan R tidak memuat pns, maka

b – c = 0

$b = c$

Terbukti bahwa jika R suatu Ring tidak memuat elemen pns, maka dalam R berlaku sifat pelenyapan.

(ii) Harus dibuktikan sebaliknya (konversnya) yaitu jika dalam Ring R memenuhi sifat pelenyapan maka R tidak memuat elemen pns

Ambil a,b ∈ R dengan a ≠ 0 sedemikian hingga

ab = 0, maka

ab = a0 karena R memenuhi sifat pelenyapan maka

b = 0 ini berarti R tidak memuat elemen pns kanan

demikian pula, jika a, b ∈ R dengan a ≠ 0 sedemikian hingga

ab = 0, maka

ab = 0a, karena R memenuhi sifat pelenyapan maka

b = 0 ini berarti R tidak memuat elemen pns kiri

Jadi Ring R tidak memuat elemen pns

Suatu Ring yang tidak memuat elemen pns dinamakan Ring tanpa pembagi nol.

Perhatikan Ring M = $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \text{ bilangan bilangan bulat} \right\}$

Dengan penjumlahan dan perkalian matrik.gelanggan ini mempunyai elemen kesatuan yaitu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

A = $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \text{M}$ dan B = $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \text{M}$

Periksalah bahwa AB = BA = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Hal ini dikatakan bahwa B adalah invers perkalian dari A (ditulis $\text{A}^{-1}$) demikian pula bahwa A maupun invers perkalian dari B (ditulis $\text{B}^{-1}$). Apakah setiap elemen M yang bukan elemen nol mempunyai invers perkalian ?

Perhatikan Ring H = $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ terhadap penjumlahan mod 10 dan perkalian mod 10. Elemen kesatuan dari H adalah 6 . Perikasalah! perhatikan bahwa 2 x 8 = 6 dan 4 x 4 = 6 ini berarti $2^{-1}$ = 8 dan $4^{-1} = 4$. Contoh-contoh tersebut merupakan ilustrasi dari definisi berikut ini.

**Definisi 2.4**

R = ring dengan elemen kesatuan u

a ∈ R ∃ b ∈ R ∋ ab = ba = u

- b = invers perkalian dari a($a^{-1}$)
- a = unit (elemen yang merupakan invers terhadap perkalian)

**Contoh :**

H = {0,1,2,3,4,5} terhadap penjumlahan mod 6 dan perkalian mod 6 adalah suatu Ring dengan elemen kesatuan 1.

Unit – unit dalam H

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 0 | 2 | 4 |
| 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 |
| 4 | 0 | 4 | 2 | 0 | 4 | 2 |
| 5 | 0 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

$u = 1$

$0^{-1}$ = tidak ada

$1^{-1} = 1$

$2^{-1}$ = tidak ada

$3^{-1}$ = tidak ada

$4^{-1}$ = tidak ada

$5^{-1} = 1$

Jadi unit dalam H = {1,5}

# BAB 3

# TIPE- TIPE RING

# BAB 3

# TIPE - TIPE RING

Ada beberapa tipe ring yang akan dalam struktur aljabar yaitu ring komutatif, ring dengan elemen kesatuan, ring tanpa pembagi nol, integral domain, field/lapangan, dan ring pembagian.

## A. Ring Komutatif

Suatu ring dikatakan komutatif / abelian bila pada operasi perkalian (multiplikatif) terpenuhi sifat komutatifnya. Secara singkat akan dijelaskan syarat dari Ring Komutatif pada definisi berikut :

**Definisi :**

Suatu struktur aljabar dengan dua operasi biner (R,+, . ) dikatakan suatu Ring Komutatif (Abelian) bila :

**a) Ring**

1. (R,+) merupakan suatu Grup Komutatif
2. (R,.) merupakan suatu Semigrup/Monoid
3. Distributif perkalian terhadap penjumlahan

**b) Komutatif pada operasi perkalian (R, . )**

Jadi, pada Ring Komutatif (R,.) yang merupakan suatu Semigrup/Monoid arus memenuhi sifat-sifat komutatifnya, yaitu : $a \cdot b = b \cdot a, \forall a,b \in R$

**Contoh**

Misalkan P = {bilangan genap, bilangan ganjil} dan P∈ Z. Tunjukan bahwa elemen-elemen bilangan "genap" dan "ganjil" adalah suatu Ring Komutatif.

**Penyelesaian**

**Daftar Cayley (P, +) dan (P,.)**

| + | Genap | Ganjil |
|---|---|---|
| Genap | Genap | Ganjil |
| Ganil | Ganjil | Genap |

| . | Genap | Ganjil |
|---|---|---|
| Genap | Genap | Genap |
| Ganil | Genap | Ganjil |

Dari daftar di atas akan ditunjukan bahwa P = {genap, ganjil} merupakan

suatu Ring Komutatif bila memenuhi :

**a) Ring**

**1. Grup Komutatif terhadap penjumlahan (P,+)**

- ***Tertutup***

  Ambil sebarang nilai dari P

  misalkan genap, ganjil ∈ P

  genap + genap = genap

  genap + ganjil = ganjil

  ganjil + ganjil = genap

  karena hasilnya genap dan ganjil ∈ P, maka tertutup terhadap P

- ***Assosiatif***

  Ambil sebarang nilai dari P

  misalkan a = genap, b = ganjil dan c = genap ∈ P

  (a + b) + c = (genap + ganjil) + genap = ganjil + genap = ganjil

  a + (b + c) = genap + (ganjil + genap) = genap + ganjil = ganjil

  Sehingga :

  (a + b) + c = a + (b + c) = ganjil

  maka P assosiatif

- ***Adanya unsur identitas***

  ✓ Ambil sebarang nilai dari P, misalkan genap ∈ P, pilih genap∈ P, sehingga genap + e = e + genap = genap, maka e = genap

  ✓ Ambil sebarang nilai dari P, misalkan ganjil ∈ P, pilih genap∈ P, sehingga ganjil + e = e + ganjil = ganjil, maka e = genap

  Maka P ada unsur satuan atau identitas

- ***Adanya unsur balikan atau invers***

  ➢ Ambil sebarang nilai dari P, misalkan genap ∈ P, pilih genap ∈ P, sehingga genap + genap = genap = e,maka (genap)-1 = genap

  ➢ Ambil sebarang nilai dari P, misalkan ganjil ∈ P, pilih ganjil ∈ P, sehingga ganjil + ganjil = ganjil = e, maka (ganjil)-1 = ganjil maka P ada unsur balikan atau invers

- ***Komutatif***

Ambil sebarang nilai dari P

misalkan a = genap, b = ganjil ∈ P

(a + b) = (genap + ganjil) = ganjil

(b + a) = (ganjil + genap) = ganjil

*Sehingga :*

(a + b) = (b + a) = ganjil

maka P komutatif

Jadi, P = {genap, ganjil} merupakan **Grup Komutatif** terhadap penjumlahan (P, +).

**2. Semigrup (P, . )**

- ***Tertutup***

Ambil sebarang nilai dari P

misalkan genap dan ganjil ∈ P

genap . ganjil = genap

genap . genap = genap

ganjil . ganjil = ganjil

karena hasilnya genap dan ganjil ∈ P, maka tertutup terhadap P

- ***Assosiatif***

Ambil sebarang nilai dari P

misalkan a = genap, b = ganjil dan c = genap ∈ P

(a . b) . c = (genap . ganjil) . genap = genap . genap = genap

a . (b . c) = genap . (ganjil . genap) = genap . genap = genap

Sehingga :

(a . b) . c = a . (b . c) = genap

maka P assosiatif

**3. Distributif perkalian terhadap penjumlahan**

- *Distribusi kanan*

  Ambil sebarang nilai dari P

  misalkan a = genap, b = ganjil dan c = genap ∈ P

  | | | |
  |---|---|---|
  | a.(b + c) | = | (a.b) + (a.c) |
  | genap . (ganjil + genap) | = | (genap.ganjil) + (genap.genap) |
  | genap.(ganjil) | = | genap + genap |
  | **genap** | **=** | **genap** |

  maka, a.(b + c) = (a.b) + (a.c) = genap

- *Distribusi kiri*

  | | | |
  |---|---|---|
  | (a + b).c | = | (a.c) + (b.c) |
  | (genap + ganjil). Genap | = | (genap. genap) + (ganjil. genap) |
  | (ganjil). Genap | = | genap + genap |
  | **genap** | **=** | **genap** |

  maka, (a + b).c = (a.c) + (b.c) = genap

Jadi, P = {genap, ganjil} distributif perkalian terhadap penjumlahan

**b) Komutatif terhadap (P, . )**

- ***Komutatif***

  Ambil sebarang nilai dari P

  misalkan a = genap, b = ganjil ∈ P

  (a . b) = (genap . ganjil) = **genap**

  (b . a) = (ganjil . genap) = **genap**

  Sehingga :

  (a . b) = (b . a) = genap

  maka P komutatif

Jadi, P = {genap, ganjil} Komutatif terhadap perkalian (P, .).

Karena P = {genap, ganjil} memenuhi semua aksioma-aksioma yang ada, maka P adalah suatu **Ring Komutatif (P,+, . )**

## B. Ring Dengan Elemen Kesatuan

Ring dengan elemen kesatuan ialah ring yang memuat elemen kesatuan ( elemen identitas terhadap perkalian ).

$\forall a \in \Re, \exists$ u = elemen kesatuan $\in \Re \ni a * u = u * a = a$

Suatu struktur aljabar dengan dua operasi biner (R,+, . ) dikatakan suatu

Ring dengan Elemen Kesatuan bila :

**a) Ring :** 1. (R,+) merupakan suatu Grup Komutatif

2. (R,.) merupakan suatu Semigrup/Monoid

3. Distributif perkalian terhadap penjumlahan

**b) Memuat elemen kesatuan pada operasi perkalian (R, . )**

*Karakteristik Ring Dengan Elemen Kesatuan*

Misalkan R adalah ring dengan elemen kesatuan 1.

Jika 1 merupakan order yang tak terbatas dalam penjumlahan, maka karakteristik dari R adalah 0. Jika 1 n order dalam penjumlahan maka karakteristik dari R adalah n.

**Contoh**

P ={bilangan genap, bilangan ganjil} adalah ring

Apakah (P, +, . ) merupakan ring dengan elemen kesatuan !

**Penyelesaian:**

- ***Adanya unsur satuan atau identitas (P, . )***
  - Ambil sebarang nilai dari P, misalkan genap ∈ P, pilih ganjil ∈ P, sehingga genap . e = e . genap = genap, maka e = ganjil
  - Ambil sebarang nilai dari P, misalkan ganjil ∈ P, pilih ganjil ∈ P, sehingga ganjil + e = e + ganjil = ganjil, maka e = ganjil

    Maka, P ada unsur satuan atau identitas

    Jadi, (P, +, . ) merupakan ring dengan elemen kesatuan

**Contoh**

(G, +, . ) adalah suatu ring

$G = \{1, -1, i, -i\}$ , Tunjukkan apakah G merupakan ring dengan elemen kesatuan !

**Penyelesaian**

**Memuat elemen kesatuan pada operasi perkalian (R, . ) ?**

Misal e = elemen identitas, maka :

$1 \times e = 1 \Rightarrow e = 1 \in G$

$-1 \times e = -1 \Rightarrow e = 1 \in G$

$i \times e = i \Rightarrow e = 1 \in G$

$-i \times e = -i \Rightarrow e = 1 \in G$

elemen identitas nya adalah $1 \in G$

Jadi, (G, +, . ) merupakan ring dengan elemen kesatuan 1

**Contoh**

M = $\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right\} \mid a, b, c$ yaitu himpunan semua matriks segitiga atas berordo 2 yang semua elemennya bilangan real. M adalah suatu ring.

Tunjukkan bahwa M merupakan ring dengan elemen kesatuan , dan berapakah elemen kesatuannya !

**Penyelesaian**

Ambil sebarang A=$\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right\} \in M \; dengan \; a, b, c \; \in R$

Misal E=$\left\{\begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}\right\}$ adalah elemen kesatuan terhadap perkalian

Maka A x E = A

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ad & ae + bf \\ 0 & cf \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

Didapat : ad = a $\rightarrow$ d =1

cf = c $\rightarrow$ f = 1

a + bf = b $\rightarrow$ ae + b.1 = b

ae = 0

e = 0 $\in R$

Jadi, E = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M$ adalah elemen kesatuan terhadap perkalian

Kesimpulan : (M, + , . ) adalah ring dengan elemen kesatuan $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

**Contoh**

Misalkan R adalah himpunan semua bil. Bulat. Operasi" $\oplus$ &$\odot$ pd R beturut didefinisikan sbb:

$\forall a, b \in$ R=>$a \oplus b \quad = a + b + 1$

$a \odot b \quad = a + ab + b$

Tunjukan bahwa $(\text{R}, \oplus, \odot)$ mrp Ring komunikatif dg el. kesatuan!

**Penyelesaian**

I. Adt$(\text{R}, \oplus)$: $g.a$

(1) Tertutup

Ambil sbr $a, b \in$R

Maka $a \oplus b = a + b + 1$ => def

Karena $a \in$ R, $b \in$ R, 1 $\in$ R

Maka $a + b$ +1 $\in$ R

Jadi $a \oplus b \in$ R

(2) Assosiatif

Abil sbr $a, b, c \in$ R

Maka $(a \oplus b) \oplus c = (a + b + 1) \oplus c$ =>definisi

$= a + b + 1 + c + 1$ =>definisi

$= a + 1 + (b + c + 1)$ =>Assosiatif dalam R

$= a + 1\ (b \oplus c)$ =>definisi

$= a + (b \oplus c) + 1$ =>komutatif dalam R

$= a \oplus (b \oplus c) + 1$ =>definisi

(3) El. Identitas

Ambil sebarang $a \in$1R

Misal i = el. identitas

Maka $a \oplus i = a$

$a + i + 1 = a$

$i = -1 \in R$

Jadi, el. identitas adalah -1

(4) Invers

Ambil sebarang $a \in R$

Misal : $a^{-1} = x$ adalah invers dari $a$

Maka $a \oplus a^{-1} = i$

$a \oplus x = i$

$a + x + 1 = -1$

$a + x = -2$

$x = -2 - a$

$x = -(2 + a) \in R$

Jadi, invers dari $a = a^{-1} = -(2 + a) \in R$

(5) Komutatif

Ambil sbr $a, b \in R$

Maka $a \oplus b = a + b + 1$ =>def

$= b + a + \mathbf{1}$ =>komutaif dlm R

$= b \oplus a$

Jadi $a \oplus b = b \oplus a$

II. Adt $(B, \odot)$ semi grup

(6) Tertutup

Ambil sebarang $a, b \in$ R

Maka $a \odot b = a + ab + b$ =>def

Karena $a \in$ R

$b \in$ R

Maka $ab \in$ R

Karena $a \in$ R, $b \in$ R, dan $ab \in$ R maka

$a + ab + b \in$ R

Jadi $a \odot b \in$ R

Kesimpulan : Tertutup

(7) Assosiatif

Ambil sebarang $a, b, c \in$ R

Maka

$(a \odot b) \odot c = (\underbrace{a + ab + b}) \odot c$ => definisi

$d \odot c$

$d + dc + c$

$(a \odot b) \odot c = (a + ab + b) + (a + ab + b)c + c$ => definisi

$= a + ab + b + ac + abc + bc + c$ => dist dlm R

$= a + (ab + ac + abc) + (b + bc + c)$ => aso dlm R

$= a + a(b + c + bc) + (b + bc + c)$ => dist dlm R

$= a + a(b + bc + c) + (b + bc + c)$ => kom dlm R

$= a + a(\underbrace{b \odot c}_{e}) + (\underbrace{b \odot c}_{e})$ => definis

$a + ae + e$

$a \odot$e

$= a \odot (b \odot c)$ =>definisi

(8) Distributif kiri

Ambil sbr $a, b, c \in$ R

Maka $(a \oplus b) \odot c$ $= \underbrace{(a + b + 1)}_{d} \odot c$ => definisi $\oplus$

$d \odot c$

$d + dc + c$

$= (a + b + 1) + (a + b + 1)c + c$ =>def$\odot$

$= a + b + 1 + ac + bc + c + c$ =>dist dlm R

$= (a + ac + c) + (b + bc + c) + 1$ => aso dlm R

$= a \odot c + b \odot c + 1$ => definisi $\odot$

$= (a \odot c) \oplus (b \odot c)$ => definisi $\oplus$

(9) Distributif kanan

Ambil sbr $a, b, c \in$ R

Maka $a \odot (b \oplus c)$ $= a \odot (\underbrace{b + c + 1}_{d})$ => definisi $\oplus$

$a \odot d$

$a + ad + d$

$= a + a(b + c + 1) + (b + c + 1)$ => def$\odot$

$= a + ab + ac + a + b + c + 1$ => dist dalam R

$= (a + ab + b) + (a + ac + c) + 1$ => aso dlm R

$= (a \odot b) + (a \odot c) + 1$ => def$\odot$

$= (a \odot b) \oplus (a \odot c)$ =>def $\oplus$

(10) Komutatif terhadap operasi kedua "$\odot$"

Ambil sbr $a, b \in$ R

Maka $a \odot b$ $= a + ab + b$ =>def$\odot$

$= a + b + ab$ => komutatif dlm R $\oplus$

$= b + a + ab$ => komutatif dlm R(penjumlahan)

$= b + ab + a$ => komutatif dlm R(penjumlahan)

$= b + ba + a$ => komutatif dlm R(perkalian)

$= b \odot a$ => def$\odot$

(11) Ambil sebarang $a \in$ R

Misal : u= y adalah elemen kesatuan terhadap "$\odot$"

Maka $a \odot$u $=a$

$a \odot$y $=a$

$a + ay + y = a$

$ay + y = a$

$y(a+1) = a$

$y = \frac{0}{a+1}$

$y = 0$

Jadi $y$ =0 ∈ R adalah elemen kesatuan terhadap terhadap $\odot$

Sehingga, $(R, \oplus, \odot)$ mrp Ring komutatif dengan elemen kesatuan 0.

## C. Ring Tanpa Pembagi Nol

Ring yang memuat pembagi nol dibedakan dengan 2 macam yaitu :

1. Ring tanpa pembagi nol (0)
   - $a \neq 0$ dan $b \neq 0, a.b \neq 0$

     (juga merupakan pembagi nol sejati karena memuat syarat $a \neq 0\ dan\ b \neq 0$)
   - $a.b = 0, a = 0$ dan $b = 0$
2. Ring pembagi nol (0) (modulo)
   - $a \neq 0$ dan $b \neq 0, a.b = 0$

Sebelum masuk ke contoh soal, kita akan sedikit menjelaskan bahwa elemen tanpa pembagi nol juga dibahas dalam sub bab ring integral domain, dimana integral domain itu membahas ring komutatif yang tidak memiliki pembagi nol.

**Contoh**

P = {bilangan genap, bilangan ganjil} adalah suatu Ring Komutatif.

Akan ditunjukkan bahwa P adalah ring tanpa pembagi nol.

**Penyelesaian**

Diketahui P = {bilangan genap, bilangan ganjil} adalah suatu Ring Komutatif.

Syarat dari Ring tanpa pembagi nol adalah :

a . b = 0, untuk a = 0 atau b = 0

Misalkan :

X = {…,-3, -1, 1, 3, ...} adalah himpunan bilangan ganjil dan

Y = {…, -4, -2, 0, 2, 4,…} adalah himpunan bilangan genap.

Dari himpunan tersebut dapat dilihat bahwa bilangan ganjil tidak ada unsur nol, tetapi bilangan genap ada unsur nol.

Jadi dapat disimpulkan bahwa P = {bilangan genap, bilangan ganjil} merupakan Ring tanpa pembagi nol , karena a.b = 0 jika a = 0 atau b = 0, ∀ a,b ∈ P.

## LATIHAN SOAL

1. Tunjukan bahwa Ring (Z4,+, . ) merupakan suatu Ring Komutatif !
2. Misalkan (R,+,.) didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada R sebagi berikut :

   $a \oplus b = a + b + 1$ dan $a \otimes b = ab + a + b$

   Tunjukkan apakah merupakan suatu Ring Komutatif?
3. Misalkan Zn = {0,1,2,3,…, n-1}. Pada Zn didefinisikan operasi penjumlahan modulo n (+n) dan perkalian modulo n (•n). Tunjukkan bahwa (Zn,+n, •n) merupakan ring komutatif dengan elemen satuan.
4. Selidiki apakah H = {0, 2, 4, 6, 8} terhadap penjumlahan modulo 10 dan perkalian modulo 10 merupakan ring dengan elemen satuan!

## D. Integral Domain

**Definisi**

Suatu ring komutatif dengan elemen kesatuan dan tidak mempunyai elemen pembagi nol disebut daerah integral (Integral Domain).

Untuk lebih jelas mengenai syarat-syarat dari Integral Domain adalah sebagai berikut :

a. (R, + , ·) merupakan ring komutatif
b. (R, + , ·) memiliki elemen kesatuan
c. (R, + , ·) tidak mempunyai elemen pembagi nol (tanpa pembagi nol)

**Contoh**

Misalkan P = {genap, ganjil} dan P ⊆ Z., P adalah suatu Ring Komutatif. Akan ditunjukkan bahwa Ring Komutatif tersebut adalah Integral Domain.

**Penyelesaian**

Diketahui P = {genap, ganjil} adalah suatu Ring Komutatif. Syarat dari Integral Domain adalah Ring Komutatif yang tidak mempunyai pembagi nol, dengan kata lain:

a.b = 0, untuk a = 0 atau b = 0.

Misalkan :

X = {…,-3, -1, 1, 3, ...} adalah himpunan bilangan ganjil dan

Y = {…, -4, -2, 0, 2, 4,…} adalah himpunan bilangan genap.

Dari himpunan tersebut dapat dilihat bahwa bilangan ganjil tidak ada unsur nol, tetapi bilangan genap ada unsur nol.

Jadi dapat disimpulkan bahwa **P = {genap, ganjil} merupakan *Integral Domain***, karena a.b = 0 jika a = 0 atau b = 0, ∀a,b ∈ P.

**Contoh**

$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \ bilangan real \right\}$ terhadap penjumlahan dan perkalian matriks adalah suatu ring. Apakah M merupakan integral domain?

**Penyelesaian**

Jika $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ dengan a ≠ 0 dan b ≠ 0

Maka $AB = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Demikian pula $BA = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ba & 0 \\ 0 & ba \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sehingga ring M tidak memuat elemen pembagi nol sejati.

Misal, B = elemen kesatuan

A · B = A

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a} & 0 \\ 0 & \frac{a}{a} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga elemen kesatuannya adalah $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Karena ring M tidak memuat elemen pembagi nol sejati. Nampak pula bahwa AB = BA, sehingga M suatu ring komutatif.

Jadi, M adalah suatu ***integral domain***.

**<u>Contoh</u>**

Tunjukan bahwa $Z_4$ bukan merupakan Integral Domain.

<u>Penyelesaian</u>

**Tabel Cayley ($Z_4$, .)**

| **x** | **0** | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 |
| **2** | 0 | 2 | 0 | 2 |
| **3** | 0 | 3 | 2 | 1 |

Dari tabel di atas, dapat kita lihat bahwa [2] adalah merupakan pembagi nol, dimana diperolah [2].[2] = 0, sehingga kita tidak selalu dapat menghilangkan seperti [2].[1] = [2].[3] tetapi [1]≠ [3].Jadi dapat disimpulkan bahwa **$Z_4$ bukan merupakan suatu Integral Domain** karena memiliki pembagi nol yaitu [2].

## E. Field/Lapangan

Misalkan F adalah suatu ring. Ring F disebut **lapangan** (**field**) jika syarat-syarat berikut ini dipenuhi:

1. F adalah ring komutatif.
2. F memiliki elemen satuan e dan e ≠ 0.
3. Setiap elemen tak nol di F memiliki invers perkalian.

**<u>Contoh</u>**

Misal (**R**, +, **.**) adalah ring himpunan bilangan riil. Ring (**R,+,.)**adalah suatu lapangan. Untuk membuktikan ini berturut-turut ditunjukkan:

i) **R** adalah ring komutatif.

   Berdasarkan sifat perkalian pada **R**, maka a **.** b = b **.** a, untuk setiap a, b∈**R**. Ini berarti R adalah ring komutatif.

ii) **R** memiliki elemen satuan e dan e ≠ 0.

Elemen satuan R adalah e = 1 ≠ 0, karena a **.** 1 = 1 **.** a = a, untuk setiap a ∈**R**.Telah ditunjukkan **R** memiliki elemen satuan 1 dan 1 ≠ 0.

iii) Setiap elemen tak nol di **R** memiliki invers perkalian.

Diambil sebarang a ∈**R,** dengan a ≠ 0, maka terdapat b =1/a ∈**R**sedemikian sehingga a **.** b = a **.** **1/a** = 1. Ini berarti setiap a ≠ 0 ∈**R**memiliki invers perkalian yaitu 1/a.

Jadi R adalah suatu ***lapangan*** atau ***field.***

**<u>Contoh</u>**

Selidiki apakah $Z_7$ suatu field terhadap penjumlahan dan perkalian mod 7!

**<u>Penyelesaian</u>**

| + | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 6 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 1 | 3 | 5 |
| 3 | 0 | 3 | 6 | 2 | 5 | 1 | 4 |
| 4 | 0 | 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 |
| 5 | 0 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 |
| 6 | 0 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

1. Tertutup"+"

   $(\forall a,b \in I_7)\ (\exists c \in I_7)\ a+b = c$

   Misal:

   $1,4 \in Z_7 \rightarrow 1+4 = 5\ ;\ 5 \in I_7$

   $2,3 \in Z_7 \rightarrow 2+3 = 5\ ;\ 5 \in I_7$ , dst

2. Assosiatif"+"

   $(\forall a,b,c \in Z_7)\ (a+b)+c = a+(b+c)$

   Misal:

   $1,2,4 \in Z_7 \rightarrow (1+2)+4 = 1+(2+4)$

   $3+4 = 1+6$

   $7 = 7 \pmod 7$

   $0 = 0$ ,dst

3. Terdapat elemen satuan "+"

   $(\exists z \in Z_7)\ (\forall a \in Z_7)\ z+a = a+z = a$

   Contoh :

   $2 \in Z_7 \rightarrow 0+2 = 2+0 = 2$

   $3 \in Z_7 \rightarrow 0+3 = 3+0 = 3$, dst

4. Setiap elemen dalam $I_7$ mempunyai elemen invers terhadap"+"

   $(\forall a \in Z_7)\ (\exists (-a) \in Z_7)\ (-a)+a = a+(-a) = z$

   Invers dari 0,1,2,3,4,5,6 masing-masing adalah 0,6,5,4,3,2,1 sebab :

   | | | |
   |---|---|---|
   | $0 + 0 = 0$ | $3 + 4 = 0$ | $6 + 1 = 0$ |
   | $1 + 6 = 0$ | $4 + 3 = 0$ | |
   | $2 + 5 = 0$ | $5 + 2 = 0$ | |

5. Komutatif "+"

   $(\forall a,b \in Z_7)\ a + b = b + a$

   Misal:

   $2,4 \in Z_7 \rightarrow 2+4 = 4+2$

   $6 = 6 \in I_7$

**Maka, $Z_7$ merupakan grup abelian**

6. Tertutup "x"

   $(\forall a,b \in Z_7)\ (\exists c \in Z_7)\ axb = c$

Misal :

2,3Є $Z_7$ → 2x3 = 6, 6 Є $Z_7$

7. Assosiatif "x"

(Va,b,cЄ $Z_7$ ) (a x b) x c = a x (b x c)

Misal:

2,3,4Є $Z_7$ → (2 x 3) x 4 = 2 x (3 x 4)

6 x 4 = 2 x 5 ( mod 7)

3 = 3 (mod 7)

8. Distributif

(Va,b,cЄ $Z_7$ )a x (b + c) = (a x b)+(a x c)dan

(b + c) x a = (b x a) + (c x a)

Misal :

1,3,4Є $Z_7$ → 1 x (3 + 4) = (1 x 3) + (1 x 4)

1 x 7= 3 + 4

(mod 7) 1 x 0 = 7 (mod 7)

0 = 0

(3 + 4) x 1 = (3 x 1) + (4 x 1)

(mod 7) 7 x 1 = 3 + 4

0 x 1 = 7 (mod 7)

0= 0

**Maka, $Z_7$ merupakan ring**

9. Komutatif "x"

(Va,bЄ $Z_7$ ) a x b = b x a

Misal:

2,5Є $Z_7$ → 2 x 5 = 5 x 2

3 = 3

**Maka, $Z_7$ merupakan ring komutatif**

10. Terdapat elemen satuan "x"

(ЭeЄ $Z_7$) (VaЄ $Z_7$) a x e = e x a = a

Contoh :

2.1 Є $Z_7$ → 2.**1** = **1**.2 = 2

Jadi elemen satuan terhadap “x” = 1

11. Setiap elemen dalam $I_7$ mempunyai elemen invers “x”

    ($\forall a \in Z_7$ ) ($\exists a^{-1} \in Z_7$) $(a^{-1}).a = a.(a^{-1}) = 1$

    Elemen invers dari 1,2,3,4,5,6 masing – masing adalah 1,4,5,2,3,6 sebab :

    | | |
    |---|---|
    | 1 x 1 = 1 | 4 x 2 = 1 |
    | 2 x 4 = 1 | 5 x 3 = 1 |
    | 3 x 5 = 1 | 6 x 6 = 1 |

Karena $Z_7$ memenuhi 1-11, jadi $Z_7$ merupakan suatu ***lapangan*/*field*.**

## F. Ring Pembagian

Jika R adalah ring dengan elemen satuan tetapi tidak komutatif, dan setiap elemen selain nolnya mempunyai invers terhadap perkalian maka R disebut ***ring pembagian***(***division ring***).

Jelas bahwa perbedaan antara lapangan dan division ring hanya pada sifat komutatifnya terhadap perkalian saja.

**Contoh**

Selidiki apakah A={0,1,2,3,4} terhadap penjumlahan dan perkalian mod 5 merupakan Ring pembagian yang komutatif !

**Penyelesaian**

| + | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 1 | 3 |
| 3 | 0 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| 4 | 0 | 4 | 3 | 2 | 1 |

1. Tertutup"+"

   $(\forall a,b \in Z_5)$ $(\exists c \in Z_5)$ $a+b = c$

   Misal :

   $1,3 \in Z_5 \rightarrow 1+3 = 4$ ; $4 \in Z_5$

   $2,4 \in Z_5 \rightarrow 2+4 = 1$ ; $1 \in Z_5$ , dst

2. Assosiatif"+"

   $(\forall a,b,c \in Z_5)$ $(a+b)+c = a+(b+c)$

   Misal:

   $1,3,4 \in Z_5 \rightarrow (1+3)+4 = 1+(3+4)$

   $4+4 = 1+7$

   $8 = 8 \pmod 5$

   $0 = 0$ ,dst

3. Terdapat elemen satuan "+"

   $(\exists Z \in Z_5)$ $(\forall a \in Z_5)$ $z+a = a+z = a$

   Contoh :

   $3 \in Z_5 \rightarrow 0+3 = 3+0 = 3$

   $4 \in Z_5 \rightarrow 0+4 = 4+0 = 4$, dst

4. Setiap elemen dalam $I_5$ mempunyai elemen invers terhadap"+"

   $(\forall a \in Z_5)$ $(\exists (-a) \in Z_5)$, maka $(-a)+a = a+(-a) = z$

   Invers dari 0,1,2,3,4 masing-masinga dalah 0,4,3,2,1 sebab :

   $0 + 0 = 0$ $\quad$ $3 + 2 = 0$

   $1 + 4 = 0$ $\quad$ $4 + 1 = 0$

   $2 + 3 = 0$

5. Komutatif"+"

   ($\forall$a,b∈ $Z_5$) a + b = b + a

   Misal :

   2,3∈ $Z_5$→ 2+3 = 3+2

   0 = 0∈ $Z_5$

Maka, $Z_5$ adalah grup komutatif

6. Tertutup "x"

   ($\forall$a,b∈ $Z_5$) (∃c∈ $Z_5$), maka axb = c

   Misal :

   1,3∈ $Z_5$→ 1x3 = 3, 3 ∈ $I_5$

7. Assosiatif "x"

   ($\forall$a,b,c∈ $Z_5$) (a x b) x c = a x (b x c)

   Misal :

   1,3,4∈ $Z_5$→ (1 x 3) x 4 = 1 x (3 x 4)

   3 x 4 = 1 x 2 ( mod5)

   2 = 2 (mod 5)

8. Distributif

   ($\forall$a,b,c∈ $Z_5$)a x (b + c) = (a x b)+(a x c)

   dan (b + c) x a = (b x a) + (c x a)

   misal :

   1,3,4∈ $Z_5$→ 1 x (3 + 4) = (1 x 3) + (1 x 4)

   1 x 2 =3 + 4

   (mod 5) 2 = 2 (mod 5)

   (3 + 4) x 1 = (3 x 1) + (4 x 1)

   (mod 5) 2 x 1 = 3 + 4

   2 = 2 (mod 5)

9. Elemen kesatuan

   $\forall e \in$ $Z_5$

   $a \,.\, e = e . a = a$

Contoh :

2 . 3 ∈ $I_5$, maka 2 . 3 = 3.2

1 = 1

Jadi, elemen kesatuannya adalah 1.

10. Elemen tak nol mempunyai Invers perkalian

(∀$a$ ∈ $Z_5$), (∃$a^{-1}$ ∈$Z_5$)

a . $a^{-1}$ = 1

maka,

1 . 1 = 1

2 . 3 = 1

Karena $Z_5$ memenuhi sifat 1 – 10, maka $Z_5$ merupakan ***ring pembagian*** yang komutatif atau ***field*** (lapangan).

**Teorema 3.1**

Setiap ring pembagian tidak memuat elemen pembagi nol sejati (pns).

***Bukti***

Misalkan R suatu ring pembagian

Ambil $a, b \in R \ni ab = 0$.

Apabila $a \neq z$, maka ada $a^{-1} \in R$, sehingga dari $ab = z$ diperoleh:

$$a^{-1}(ab) = a^{-1}0$$
$$(a^{-1}a)b = 0$$
$$ub = 0 \quad , u = \textit{elemen kesatuan dari } R$$
$$b = 0$$

Apabila$b \neq 0$, maka ada $b^{-1} \in R$, sehingga dari $ab = 0$ diperoleh :

$$(ab)b^{-1} = 0b^{-1}$$
$$a(bb^{-1}) = 0$$
$$au = 0 \qquad , u = \textit{elemen kesatuan dari } R$$
$$a = 0$$

Jadi∀ $a, b \in R$ jika $ab = 0$, maka $a = 0$atau$b = 0$. Ini berarti ring pembagian R tidak memuat elemen pembagi nol sejati (pns).

**Teorema 3.2**

Setiap daerah integral (integral domain) berhingga adalah suatu medan (lapangan).

***Bukti***

Misalkan D suatu daerah integral yang mempunyai n elemen.

Ambil a Є D, a ≠ 0dan himpunanK = $\{ax \mid x \in D \ dan \ x \neq 0\}$

maka, K $\subset$ D (tertutup terhadap perkalian)

Sehinggadalam K berlaku sifat kanselasi (pelenyapan).

ax = ay, dengan a ≠ 0

x = y

Hal ini menunjukkan bahwa K terdiri atas (n-1) elemen dari D yang bukan elemen nol. Karena D memuat elemen kesatuan u, maka u Є K. sehingga untuk a Є D dengan a ≠ 0, maka x Є D dengan x ≠ 0 pula, sedemikian sehingga ax = u. ini berarti $a^{-1} = x$.

Jadi $\forall \, a \in D$ dengan a ≠ 0, maka $a^{-1} \in D$, yaitu setiap elemen D yang bukan elemen nol mempunyai invers perkalian, sehingga D adalah suatu medan.

# BAB 4

# SUBRING

# BAB 4
# SUBRING

**Definisi 4.1**

Misalkan $(R, +, .)$ adalah suatu Ring, $S \neq \emptyset$ adalah himpunan bagian dari R $(S \subseteq R)$. Bila operasi yang sama dengan $(S, +, .)$ membentuk suatu Ring maka S disebut Subring dari R.

**Teorema 4.1**

Misalkan S himpunan tak kosong dalam ring (R, +, . ). Himpunan S merupakan subring dari R jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a + (-b) \in S$ dan $ab \in S$ $(operasi\ penjumlahan\ dan\ perkalian)$.

***Bukti***

$(\Rightarrow)$ Diasumsikan bahwa S adalah subring dari ring R. Akibatnya untuk sebarang $a, b \in S$ berlaku

$a \in S, b \in S \Longrightarrow a \in S$ dan $-b \in S$

$\Longrightarrow a + (-b) \in S$

dan

$a \in S, b \in S \Rightarrow ab \in S.$

$(\Leftarrow)$ Diasumsikan bahwa untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a - b \in S$ dan $ab \in S$. Dengan menggunakan sifat-sifat ini diperoleh :

$a \in S, a \in S \Longrightarrow 0 = a - a \in S$

dan

$0 \in S, a \in S \Longrightarrow -a = 0 - a \in S$

Akibatnya

$$\begin{aligned} a \in S, b \in S &\Longrightarrow a + b \in S \\ &\Longrightarrow a + (-b) \in S \\ &\Longrightarrow a - b \in S \end{aligned}$$

Dan dari asumsi

$a \in S, b \in S \Longrightarrow ab \in S.$

jadi S tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian, terdapat elemen netral (nol) di dalam S dan setiap elemen di dalam S mempunyai elemen negatifnya di dalam S.

Selanjutnya karena S merupakan subset dari R, setiap elemen dari S juga elemen dari R, maka di dalam S juga berlaku sifat komutatif dan assosiatif terhadap penjumlahan dan didalam S juga berlaku sifat assosiatif terhadap perkalian serta berlaku sifat distributif kiri dan kanan.

Ini berarti S terhadap operasi penjumlahan dan perkalian yang sama dengan operasi pada R merupakan ring. Berdasarkan definisi subring S merupakan subring dari R.

Dari definisi subring, dapat disimpulkan bahwa suatu himpunan bagian dari suatu ring $(R, +, \cdot)$. merupakan ring jika :

1. terhadap penjumlahan $+$: $(S, +)$ juga merupakan grup Abelian
2. terhadap perkalian : $S$ juga bersifat tertutup dan assosiatif, untuk assosiatif yakni
$$(s_1 \cdot s_2)\, s_3 = s_1\, (s_2 \cdot s_3)\ untuk\ \forall s_1, s_2, s_3 \in S$$
3. terhadap keduanya (penjumlahan dan perkalian): S bersifat distributif kiri dan kanan, yakni
$$(s_1 + s_2)\, s_3 = (s_1 \cdot s_3) + (s_2 \cdot s_3)\ untuk\ \forall s_1, s_2, s_3 \in S$$
$$s_1\, (s_2 + s_3) = (s_1 \cdot s_2) + (s_1 \cdot s_3)\ untuk\ \forall s_1, s_2, s_3 \in S$$

Ini berarti S terhadap operasi penjumlahan dan perkalian yang sama dengan operasi pada R merupakan ring. Berdasarkan definisi subring S merupakan subring dari R.

**<u>Teorema 4.2</u>**

Jika S dan T merupakan subring dari ring R, maka S ∩ T juga subring dari ring R.

***Bukti***

Ambil sebarang a,b ∈ S ∩ T. Ini berarti a,b ∈ S dan a,b ∈ T.

Karena S dan T merupakan subring dari ring R, maka berlaku

$$\left.\begin{matrix} a - b \\ a \cdot b \end{matrix}\right\} \in S$$

dan

$$\left.\begin{matrix} a - b \\ a \cdot b \end{matrix}\right\} \in T$$

Akibatnya

$$\left.\begin{matrix} a - b \\ a \cdot b \end{matrix}\right\} \in S \cap T$$

Jadi S ∩ T merupakan subring dari ring R.

**<u>Teorema 4.3</u>**

Misalkan R ring dan $S \subset R, S \neq \emptyset$. S merupakan subring dari R jika dan hanya jika

(i) $ab \in S$

(ii) $ab^{-1} \in S$ untuk setiap $a, b \in S$

***Bukti***

(⇒) Diketahui S subring dari R.

Maka S tertutup terhadap perkalian dan setiap elemen mempunyai invers terhadap penjumlahan.

Jadi (i) dan (ii) dipenuhi.

(⇐) Diketahui (i) dan (ii)

- Berdasarkan (ii), $\langle S, +\rangle$ merupakan subgrup,
  Karena $\langle R, +\rangle$ grup komutatif maka $\langle S, +\rangle$ grup komutatif.
- Berdasarkan (i), operasi perkalian bersifat tertutup di S.

- Sifat assosiatif operasi perkalian dan distributif operasi penjumlahan terhadap perkalian dipenuhi di S karena $S \subset R$.

Jadi terbukti bahwa S subring dari R.

Dari uraian di atas, syarat-syarat dari subring adalah sebagai berikut

Misalkan (R, +, .) adalah suatu ring. S adalah himpunan bagian dari R yang disebut subring dari R, bila untuk setiap $a, b \in S$, berlaku :

1. $S \neq \emptyset$

   Syarat 1 menyatakan bahwa himpunan bagian dari Ring tersebut bukan himpunan kosong.
2. $a + (-b) \in S$

   Syarat 2 menyatakan bahwa (S, +) adalah merupakan suatu grup komutatif.
3. $a \, . \, b \in S$

   Syarat 3 menyatakan bahwa (S, .) adalah merupakan suatu semigrup.

Sehingga dapat dikatakan bahwa syarat-syarat tersebut telah memenuhi syarat dari suatu ring. Dikarenakan S adalah himpunan bagian dari R, $S \subseteq R$, maka S dapat dikatakan sebagai subring dari R.

**<u>Contoh</u>**

1. Selidiki apakah ring himpunan bilangan genap merupakan subring dari ring himpunan bilangan bulat.

   Jawab :

   G : {bilangan bulat genap} atau G : $\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

   Akan dibuktikan G subring dari bilangan bulat

   Jika diambil

   $X_1 = 2n_1 \qquad ; n_1 \in \mathbb{Z}$

   $X_2 = 2n_2 \qquad ; n_2 \in \mathbb{Z}$

   Maka

   1) $X_1 - X_2 = 2n_1 - 2n_2$

      $= 2(n_1 - n_2) \in G$

      Karena $n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \rightarrow (n_1 - n_2) \in \mathbb{Z} \rightarrow 2(n_1 - n_2) \in G$

2) $X_1 . X_2 = (2n_1)(2n_2)$

$= 2(2n_1 n_2) \in G$

Karena $n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \rightarrow n_1 n_2 \in \mathbb{Z} \rightarrow 2n_1 n_2 \in G \rightarrow 2(2n_1 n_2) \in G$

Karena syarat 1) dan 2) terpenuhi maka G subring dari $\mathbb{Z}$.

2. Misalkan $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ merupakan suatu Ring, tunjukkan bahwa $S = \{0,2\}$ adalah Subring dari $\mathbb{Z}_4$.

Penyelesaian :

Akan ditunjukkan bahwa $S = \{0,2\}$ memenuhi syarat-syarat dari suatu Ring.

1) $S \neq \emptyset$, syarat terpenuhi karena $S = \{0,2\}$
2) $a + (-b) \in S$

misalkan 0, 2 ∈ S

$2 - 0 = 2$

$2 - 2 = 0$

$0 - 2 = 2$

Sehingga 0, 2 ∈ S

3) $a . b \in S$

misalkan 0, 2 ∈ S

$2.0 = 0$

$2.2 = 0$

$0.2 = 0$

Sehingga 0 ∈ S

Syarat (1), (2), dan (3) terpenuhi maka S adalah Subring dari $\mathbb{Z}_4$.

## **Latihan Soal Dan Pembahasan**

1. Tunjukkan bahwa $Q(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Q\}$ adalah merupakan subring dari R.

Penyelesaian

Akan ditunjukkan bahwa $Q(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3}\,|a, b\ \in Q\}$ memenuhi syarat-syarat dari suatu ring.

1) $S \neq \emptyset$, syarat terpenuhi karena $Q(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3}\,|a, b\ \in Q\}$

2) $\mathrm{a} + (-\mathrm{b}) \in\ Q(\sqrt{3})$

   misalkan $a + b\sqrt{3}$ , $c + d\sqrt{3} \in\ Q(\sqrt{3})$, maka :

   $(a + b\sqrt{3}) + (-c - d\sqrt{3}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{3} \in\ Q(\sqrt{3})$

3) $\mathrm{a.b} \in\ Q(\sqrt{3})$

   misalkan $a + b\sqrt{3}$ , $c + d\sqrt{3} \in\ Q(\sqrt{3})$, maka :

   $(a + b\sqrt{3}).\ (c + d\sqrt{3}) = (ac + 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3} \in\ Q(\sqrt{3})$

Syarat (1), (2), dan (3) terpenuhi maka $Q(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3}\,|a, b\ \in Q\}$ adalah subring dari R.

2. Diketahui himpunan bilangan Prima $(\mathrm{P}; +, \times)$ dan ring dari himpunan bilangan cacah $(\mathrm{C}; +, \times)$*)*. Selidiki apakah $(\mathrm{P}; +, \times)$ Subring dari $(\mathrm{C}; +, \times)$*)*.

   **Penyelesaian :**

   Akan dibuktikan bahwa P subring dari $(\mathrm{C}; +, \times)$.

   (i). $P \neq \emptyset$ karena P = { 2, 3,5, 7, 11, 13,.....}

   (ii). $(\forall\ a, b\ \in P)\ (a + (-b)) \in\ P$

   Misal : 7 , 5 ∈ P => 7+(-5) = 2 => 2 ∈ P

   *Karena Syarat (ii) tidak terpenuhi maka* $(\mathrm{P}; +, \times)$ *adalah bukan subring dari* $(\mathrm{C}; +, \times)$.

3. Diketahui $M' = \left\{\begin{pmatrix} x & o \\ y & z \end{pmatrix} \mid x, y\ , z\ \in B\right\}$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks. Apakah M' subring dari ring matriks M ordo 2 ? $M = \left\{\begin{pmatrix} a & o \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c\ \in B\right\}$

   **Penyelesaian**

   Akan dibuktikan $M' = \left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \mid x, y\ , z\ \in B\right\}$ suatu subring dari *( M ; + ; x )*

$M' \subset M$ $atau$ $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$

(i). $M' \neq \emptyset$ karena $M' = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in B \right\}$

(ii). Ambil $\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ y_1 & z_1 \end{pmatrix} \in M'$ $dan$ $\begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix}$

Dengan $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \in B$ maka

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ y_1 & z_1 \end{pmatrix} + \left( -\begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & 0 \\ y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \end{pmatrix}$$

karena

$x_1 - x_2 \in B$

$y_1 - y_2 \in B$

$0 \in B$

$z_1 - z_2 \in B$

Sehingga $\begin{pmatrix} x_1 - x_2 & 0 \\ y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \end{pmatrix} \in M'$

(iii). $\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ y_1 & z_1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 . x_2 & 0 \\ y_1 x_2 + z_1 y_2 & z_1 z_2 \end{pmatrix}$

Karena

$x_1 . x_2 \in B$

$y_1 x_2 + z_1 y_2 \in$ B

$0 \in B$

$z_1 - z_2 \in B$

Sehingga $\begin{pmatrix} x_1 . x_2 & 0 \\ y_1 x_2 + z_1 y_2 & z_1 . z_2 \end{pmatrix} \in M'$

Jadi, M’ subring dari M ordo 2x2

# BAB 5

# IDEAL

# BAB 5
# IDEAL

Pada materi grup kita ketahui ada subgrup normal yang merupakan Subgrup yang memiliki sifat khusus. Di dalam ring juga ada subring khusus yang memiliki sifat-sifat istimewa yaitu tertutup terhadap perkalian unsur di luar Subring. Subring semacam ini dinamakan suatu **ideal**.

Pada ideal dikenal dengan ***ideal kiri*** yaitu bila tertutup terhadap perkalian unsur di sebelah kiri dan ***ideal kanan*** yaitu bila tertutup terhadap perkalian unsur di sebelah kanan. Untuk lebih jelasnya akan kita lihat dalam definisi berikut :

**Definisi 5.1**

Misalkan (R,+,.) adalah suatu Ring dan $I \subset R$ dengan $I \neq \emptyset$, I disebut ***ideal kiri*** dari R jika

i. $\forall a, b \in I$ berlaku $\left(a + (-b)\right) \in I$
ii. $\forall a \in I$ dan $r \in R \Rightarrow ra \in I$

**Definisi 5.2**

Misalkan (R,+,.) adalah suatu Ring dan $I \subset R$ dengan $I \neq \emptyset$, I disebut ***ideal kanan*** dari R jika

i. $\forall a, b \in I$ berlaku $\left(a + (-b)\right) \in I$
ii. $\forall a \in I$ dan $r \in R \Rightarrow ar \in I$

**Definisi 5.3**

Misalkan (R,+,.) adalah suatu Ring dan $I \subset R$ dengan $I \neq \emptyset$, I disebut ***Ideal Dua Sisi (Ideal Kiri Sekaligus Ideal Kanan)*** dari R jika

i. $\forall a, b \in I$ berlaku $\left(a + (-b)\right) \in I$
ii. $\forall a \in I$ dan $r \in R \Rightarrow ra \in I$ dan $ar \in I$

**Contoh**

1. Diketahui $Z$ ring dari bilangan bulat dan $I = \{K\,x \mid x \in Z\}$ dengan K bilangan bulat. Selidiki apakah $I$ ideal dari $Z$.

**Penyelesaian**

Akan dibuktikan I ideal dari Ring $Z$

Ambil dua elemen dari I

Misal : $Kx_1 \in I$ dan $Kx_2 \in I$ dengan $x_1\, x_2 \in Z$

Maka :

i. $(\forall\, Kx_1 ;\ Kx_2 \in I \Rightarrow \mathbf{Kx_1} + (-\,\mathbf{Kx_2}) = \mathbf{K}\,(\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}) \in \mathbf{I}$

$K(x_1 - x_2) \in I$ sebab $x_1 ;\ x_2 \in Z \implies (x_1 - x_2) \in Z$

ii. $(\forall\, K\,x \in I\,)\,(\forall\, r \in Z) \implies \mathbf{r}(\mathbf{Kx}) = (\mathbf{rK})\mathbf{x} \in \mathbf{I}$

dan $(\mathbf{Kx})\mathbf{r} = \mathbf{K}(\mathbf{x\,r}) = (\mathbf{Kr})\,\mathbf{x} \in \mathbf{I}$

Karena (i) dan (ii) dipenuhi I , maka I adalah ideal

2. Diketahui Ring matriks ordo 2 $R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle|\, a, b, c, d \in \text{Real}\right\}$ dan $I = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \text{Real}\right\}$, dengan $I \subset R$. Selidiki apakah I merupakan :
   a. Ideal kiri dari ring R
   b. Ideal kanan dari ring R
   c. Ideal dari ring R

**Penyelesaian**

Akan dibuktikan $I = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \text{Real}\right\}$ suatu ideal kanan dan ideal kiri dari ring R.

a. Adb ideal kiri dari ring R

   i. Ambil sebarang $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ dan $B = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ dengan $x_1\,, x_2\,, y_1\,, y_2, \in R$, maka

   $A + (-B) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(-\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$$= \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

ii. Ambil sebarang $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ dan $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R$ dengan $x, y, a, b, c, d \in R$, maka

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax & ay \\ cx & dy \end{pmatrix} \notin I$$

Karena (ii) tidak dipenuhi I, maka I ***bukan ideal kiri***

b. Adb ideal kanan dari ring R

i. Ambil sebarang $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ dan $B = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ dengan $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$, maka

$$A + (-B) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left( - \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

ii. Ambil sebarang $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ dan $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R$ dengan $x, y, a, b, c, d \in R$, maka

$$AB = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xa + yc & xb + yd \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

Karena (i) dan (ii) dipenuhi I merupakan ***ideal kanan.***

c. Adb ideal dari ring R

Karena I bukan merupakan ideal kiri dan I merupakan ideal kanan, syarat ideal harus ideal kanan dan ideal kiri, maka I ***bukan*** merupakan ***ideal***.

- Ideal I disebut **ideal trivial** jika I = {0} dan
- Ideal I disebut **ideal sejati** jika $I \neq R$.
- Ideal I dinamakan **ideal tak sejati** jika I = R.

- Ring yang tidak mempunyai ideal sejati disebut **ring sederhana** ***(simple ring)***.
- Apabila **R ring komutatif**, maka ideal kanan juga merupakan ideal kiri.

  Catatan :

  1. Ideal pasti merupakan subring dan tidak sebaliknya.
  2. Syarat ke-2, $(\forall r \in R)(\forall a \in I)$ berlaku $ra, ar \in I$ berarti bahwa $ra \neq ar$.

**<u>Teorema 5.1</u>**

Syarat perlu dan cukup untuk subset tidak kosong I dari ring R merupakan ideal dari R adalah

1. untuk setiap a, b ∈ I berlaku $a + (-b) \in I$
2. untuk setiap a ∈ I dan r ∈ R berlaku ar, ra ∈ I

***Bukti***

**Syarat perlu.**

Diasumsikan bahwa I merupakan ideal dari ring R. Akibatnya I suatu subring dari R. Dengan menggunakan definisi ideal, berarti $a \in I, r \in R \Rightarrow ar, ra \in I$. Karena I merupakan subring dari ring R, maka terhadap operasi penjumlahan I merupakan subgrup dari grup penjumlahan R. Akibatnya $a \in I, b \in I \Rightarrow a + (-b) \in I$

**Syarat cukup.**

Diasumsikan bahwa I adalah subset tak kosong dari ring R yang memenuhi sifat 1) dan 2), sehingga jika a dan b sebarang dua elemen di dalam I, maka dengan menggunakan sifat 1) diperoleh:

$$a \in I, b \in I \Rightarrow a + (-b) \in I$$

dan dengan sifat 2), berlaku:

$$a \in I, b \in I \Rightarrow a \in I, b \in R \Rightarrow a\,b \in I$$

Ini berarti I adalah subring dari ring R. Dengan demikian I adalah subring dari ring R yang juga memenuhi sifat 2). Jadi, I ideal dari ring R.

**Teorema 5.2**

Diketahui R ring komutatif dengan elemen satuan dan I, J masing-masing merupakan ideal pada R, maka kedua sifat berikut berlaku:

I. $I \cap J$ merupakan ideal pada R.

II. $I + J$ merupakan ideal pada R.

***Bukti***

I. Karena I dan J masing-masing merupakan ideal, maka $0 \in I, J$ dan akibatnya $0 \in I \cap J$ . Dengan demikian $I \cap J \neq \emptyset$. Diambil sebarang $a, b \in I \cap J$ , maka $a, b \in I$ dan $a, b \in J$. Karena I dan J merupakan ideal, maka $a - b \in I$ dan $a - b \in J$. Dengan demikiana $a - b \in I \cap J$. Diambil sebarang $a \in I \cap J$, maka $a \in I$ dan $a \in J$. Karena I dan J ideal, maka untuk sebarang $r \in R$, berlaku $ar = ra \in I$ dan $ar = ra \in J$. Dengan demikian $ar = ra \in I \cap J$ . Jadi, terbukti bahwa $I \cap J$ merupakan ideal pada R.

II. Diperhatikan bahwa $I + J = \{x + y | x \in I, y \in J\}$. Karena I dan J masing-masing merupakan ideal, maka $0 \in I, J$ dan akibatnya $0 = 0 + 0 \in I, J$ . Dengan demikian $I + J \neq \emptyset$. Diambil sebarang $a, b \in I + J$, maka $a = x_1 + y_1$ dan $b = x_2 + y_2$ untuk suatu $x_1, x_2 \in I$ $y_1, y_2 \in J$. Karena I dan J merupakan ideal, maka $x_1 - x_2 \in I$ dan $y_1 - y_2 \in J$. Dengan demikian, $a - b = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \in I + J$. Diambil sebarang $a, b \in I + J$, maka $a = x_1 + y_1$ untuk suatu $x_1 \in I$ dan $y_1 \in J$. Karena I dan J ideal. Maka untuk sebarang $r \in R$, berlaku $x_1 r = r x_1 \in I$ dan $y_1 r = r y_1 \in J$. Dengan demikian $ar = (x_1 + y_1)r = x_1 r + y_1 r = r x_1 + r y_1 = r(x_1 + y_1) = ra \in I + J$

Jadi, terbukti bahwa $I + J$ merupakan ideal pada R.

**Teorema 5.3:**

Suatu field tidak mempunyai ideal sejati.

***Bukti***

Misalkan F suatu field dan $S \neq \{0\}$ adalah suatu ideal dari F, maka $S \subset F$ .

Ambil sembarang $a \in S$ , $a \neq z$ dan $a^{-1} \in F$. Karena S suatu ideal dari F maka $aa^{-1} = u \in S$ .

Sehingga untuk sembarang $x \in F$ maka $xu = x \in S$.

Jadi, diperoleh bahwa $F \subset S$ dan karena $S \subset F$ maka $F = S$.

Sehingga ideal dari F yang bukan $\{0\}$ adalah F.

Oleh karena itu, ideal-ideal dari F hanyalah F dan $\{0\}$ saja.

Jadi, field F tidak mempunyai ideal sejati.

**Teorema 5.4**

Apabila R suatu ring komutatif dengan elemen kesatuan dan tidak mempunyai ideal sejati, maka R suatu field.

***Bukti***

Ambil sembarang $a \in R$ dan $a \neq z$, karena R tidak mempunyai ideal sejati, maka $Ra = \{ya | y \in R\} = R$. Selanjutnya, karena $u \in R \ \exists\ b \in R \ni ba = u$.

**Teorema 5.5**

Misalkan R ring dengan elemen kesatuan dan I ideal dari R. Jika I memuat elemen unit maka $I = R$.

***Bukti***

Misalkan u elemen unit di I, $\exists v \in R \ni uv = 1$. Karena $u \in I, v \in R$ dan I merupakan ideal di R, maka $uv = 1 \in I$

Ditunjukkan $I = R$

i. Jelas bahwa $I \subset R$ karena I ideal dari R

ii. Ambil sebarang $r \in R$

Karena $1 \in I \Rightarrow r = r.1 \in I$

Jadi $R \subset I$

Berdasarkan i dan ii diperoleh $I = R$

**Jenis-jenis Ideal**

1. Ideal Utama

   Diketahui R ring komutatif dengan elemen satuan dan I ideal pada R. Ideal I disebut ideal utama (principal ideal) jika dan hanya jika I dibangun oleh tepat satu elemen pada R, yaitu I = a untuk suatu a ∈ R .
2. Daerah Ideal Utama

   Diketahui R ring komutatif dengan elemen satuan. Ring R disebut daerah ideal utama (principal ideal domain) jika dan hanya jika R daerah integral dan setiap ideal pada R merupakan ideal utama.
3. Ideal Prima

   Diketahui R ring komutatif dengan elemen satuan dan I ideal pada R. Ideal I disebut ideal prima (prime ideal) jika dan hanya jika I ideal sejati dan untuk setiap a, b ∈ R dengan ab ∈ I dan a ∉ I berakibat b ∈ I.
4. Ideal Maksimal

   Pandang suatu Ring R. K adalah suatu Ideal Maksimal pada R jika K ≠R, dan jika tidak ada Ideal J yang terletak di antara K dan R; yakni, jika K ⊂ J ⊂ R, maka K = J atau J = R.

**Definisi 5.4**

i. Misalkan R ring komutatif dan $a \in R$, ideal $I = \{ra | r \in R\}$ dinamakan ***ideal utama (principal ideal)*** yang dibangun oleh a dan disimbolkan dengan $\langle a \rangle$. Suatu ideal dinamakan ideal utama apabila ideal tersebut dapat dibangun oleh satu elemen.

ii. Suatu ring komutatif dengan unsur kesatuan, di mana setiap idealnya adalah ideal utama, disebut ***ring ideal utama***.

iii. Suatu daerah integral R dinamakan ***daerah ideal utama*** apabila setiap ideal di R merupakan ideal utama.

**<u>Contoh</u>**

Setiap ideal di Z berbentuk nZ = $\langle n \rangle$ yang merupakan ideal utama yang dibangun oleh n. Karena Z merupakan daerah integral maka berdasarkan Definisi 5.4, Z merupakan daerah integral utama.

**<u>Definisi 5.5</u>**

Misalkan R suatu ring dan S adalah suatu ideal dari R dengan $S \neq$ R. S disebut *Ideal Maksimal* dari R, jika tidak ada ideal dari R yang memuat S selain S dan R sendiri.

**<u>Contoh</u>**

$(\mathrm{Z}, +, .)$ adalah ring komutatif. $\mathrm{K} = \langle 11 \rangle$ adalah ideal maksimal dalam Z, sebab K tidak termuat dalam ideal lainnya dalam ring Z, kecuali K sendiri dan 1. $\mathrm{T} = \langle 6 \rangle$ bukan ideal maksimal, sebab T termuat dalam ideal $\langle 2 \rangle = \{2\mathrm{x}|\mathrm{x} \in \mathrm{Z}\}$ dan juga termuat dalam ideal $\langle 3 \rangle = \{3\mathrm{x}|\mathrm{x} \in \mathrm{Z}\}$ dalam Z.

**<u>Definisi 5.6</u>**

Misalkan R suatu gelanggang komutatif dan S suatu ideal dari R. s disebut ***Ideal Prima*** dalam R, apabila $\forall \mathrm{a}, \mathrm{b} \in$ R jika ab $\in$ S, maka a $\in S$ atau b $\in$ S.

<u>Contoh</u>

$(\mathrm{Z}, +, .)$ adalah ring komutatif. Ideal $\mathrm{P} = \{5\mathrm{x}|\mathrm{x} \in \mathrm{Z}\}$ adalah ideal prima, sebab jika , b $\in$ P , maka $5|$ab dan karenanya $5|$a atau $5|$b (ingat bahwa 5 adalah prima).

**Teorema 5.6**

Suatu ideal dari ring bilangan-bilangan bulat adalah ideal maksimal jika dan hanya jika ideal tersebut dihasilkan oleh suatu bilangan prima.

***Bukti***

Misalkan p suatu bilangan prima dan $= \{ap|a \in Z\}$, yaitu ideal utama dalam Z yang dihasilkan oleh p. Z adalah ring bilangan-bilangan bulat. Akan ditunjukkan bahwa S adalah ideal maksimal dari Z.

Ambil T suatu ideal dari Z yang memuat S sehingga T adalah suatu ideal utama. Misalkan $T = \{aq|a \in Z\}$ untuk suatu $q \in Z$. Karena $S \subset T$ dan $p \in S$, maka $p \in T$ sehingga $p = aq$ untuk setiap $a \in Z$.

Karena p bilangan prima dan $p = aq$, maka $q = 1$ atau $q = p$.

Jika $q = 1$, maka T = Z.

Jika $q = p$, maka T = S.

Jadi, S adalah ideal maksimal dari Z.

Sebaliknya, misalkan S adalah suatu ideal maksimal dari Z yang dihasilkan oleh p, harus ditunjukkan bahwa p suatu bilangan prima. Andaikan p bukan bilangan prima, maka $p = mn$ dengan $m \neq 1$ dan $m \neq p$. Misalkan $M = \langle m \rangle$, maka $S \subset M \subset Z$, tetapi karena S suatu ideal maksimal, maka $M = S$ atau $M = Z$.

Jika $M = Z$, maka M suatu ideal yang dihasilkan oleh 1, sehingga $m = 1$. Kontradiksi dengan pengandaian.

Jika $M = S$, maka $m = ap$ untuk setiap $a \in Z$, sehingga

$$apn = mn$$

$$pan = p$$

$$an = 1$$

Karena $a, n \in Z$ dan $an = 1$, maka $n = 1$. Kontradiksi pula dengan pengandaian. Jadi p adalah suatu bilangan prima.

# BAB 6

# RING FAKTOR

# BAB 6
# RING FAKTOR

Sama halnya dengan Grup Faktor, di dalam Ring juga dikenal dengan Ring Faktor. Dalam bab ini akan dijelaskan mengenai Ring Faktor yang mempunyai sifat-sifat hampir sama dengan Grup Faktor.

## Ring Faktor

Pada bab 5, telah kita pelajari mengenai Ideal, yang mirip dengan Subgrup Normal dalam Grup. Suatu Ring Faktor terdiri dari himpunan dari koset-koset Ring tersebut yang diantaranya adalah ideal-ideal.

**<u>Definisi 6.1</u>**

Misalkan R adalah suatu Ring dan S adalah suatu Ideal dari R.

R/S ={S + a | a ∈ R} adalah Ring dengan

1. (S + a) + (S + b) = S + (a + b)
2. (S + a) (S + b) = S + (ab)

Ring semacam ini disebut Ring Faktor atau Ring Kuoisen.

Sekarang akan kita buktikan bahwa R/S = {S + a | a ∈ R} membentuk suatu Ring dengan dua operasi biner yaitu terhadap penjumlahan (+) dan terhadap perkalian (.) yang membentuk suatu Ring (R/K,+,.). Adapun syarat-syarat suatu Ring adalah sebagai berikut:

Grup Komutatif :

a. Tertutup terhadap penjumlahan $(+)$ di $\mathrm{R}/S$

   Misal $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{R}$ dan $\mathrm{a}+\mathrm{b} \in \mathrm{R}$

   Maka:

   Untuk setiap $(S+\mathrm{a}), (S+\mathrm{b}) \in \mathrm{R}/S$

   berlaku $(S+\mathrm{a})+(S+\mathrm{b}) = \mathrm{S}+(\mathrm{a}+\mathrm{b})$

   dimana $\mathrm{S}+(\mathrm{a}+\mathrm{b}) \in \mathrm{R}/\mathrm{S}$

Sehingga $S + (a + b) \in R/S$ tertutup terhadap penjumlahan di $R/S$

b. Assosiatif terhadap penjumlahan $(+)$ di $R/S$

Misal $a, b, c \in R$

Maka $a + (b + c) = (a + b) + c$

Sehingga :

Untuk setiap $(S + a), (S + b), (S + c) \in R/S$

$$[(S + a) + (S + b)] + (S + c) = (S + a) + [(S + b) + (S + c)]$$

$$[S + (a + b)] + (S + c) = (S + a) + [S + (b + c)]$$

$$S + [(a + b) + c] = S + [a + (b + c)]$$

$$(S + a) + [S + (b + c)] = [S + (a + b)] + (S + c)$$

$$(S + a) + [(S + b) + (S + c)] = [(S + a) + (S + b)] + (S + c)$$

c. Punya invers terhadap penjumlahan (+) di $R/S$

Misal $a \in R$

Maka $a + (-a) = (-a) + a = i = 0$

Sehingga :

$$(S + a) \in R/S$$

$$(S + a) + \big(S + (-a)\big) = (S + \big(a + (-a)\big) = S + 0 = S$$

$$\big(S + (-a)\big) + (S + a) = (S + \big((-a) + a\big) = S + 0 = S$$

$$\Rightarrow (S + a) + \big(S + (-a)\big) = \big(S + (-a)\big) + (S + a) = S + 0 = S$$

d. Ada elemen identitas terhadap penjumlahan di $R/S$

Misal $a \in R$

Maka $a + e = e + a = a$

Sehingga:

Untuk setiap $(S + a) \in R/S$

$$(S + 0) + (S + a) = \big(S + (0 + a)\big) = S + a$$

$$(S + a) + (S + 0) = \big(S + (a + 0)\big) = S + a$$

$$\Rightarrow (S + 0) + (S + a) = (S + a) + (S + 0) = S + a$$

e. Komutatif terhadap penjumlahan di $R/S$

Misalkan $a, b \in R$

Maka $a + b = b + a$

Sehingga :

Untuk setiap $(S + a), (S + b) \in R/S$

$(S + a) + (S + b) = (S + b) + (S + a)$

$\big(S + (a + b)\big) = \big(S + (b + a)\big)$

$\big(S + (b + a)\big) = \big(S + (a + b)\big)$

$(S + b) + (S + a) = (S + a) + (S + b)$

Semigrup :

a. Tertutup terhadap perkalian di $R/S$

Misal $a, b \in R$ dan $a \cdot b \in R$

Maka:

Untuk setiap $(S + a), (S + b) \in R/S$

Berlaku $(S + a) \cdot (S + b) = S + (a \cdot b)$ dimana $S + (a \cdot b) \in R/S$

Sehingga $S + (a \cdot b) \in R/S$ tertutup terhadap perkalian di $R/S$

b. Assosiatif terhadap perkalian di $R/S$

Misal $a, b, c \in R$

Maka $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Sehingga :

Untuk setiap $(S + a), (S + b), (S + c) \in R/S$

$[(S + a) \cdot (S + b)] \cdot (S + c) = (S + a) \cdot [(S + b) \cdot (S + c)]$

$[S + (a \cdot b)] + (S \cdot c) = (S + a) \cdot [S + (b \cdot c)]$

$S + [(a \cdot b) \cdot c] = S + [a \cdot (b \cdot c)]$

$(S + a) \cdot [S + (b \cdot c)] = [(S + a) \cdot (S + b)] \cdot (S + c)$

Distributif terhadap perkalian dan penjumlahan :

a. Distributif terhadap perkalian dan penjumlahan di $R/S$

Misalkan $a, b, c \in R$

Maka $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$dan $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

Sehingga :

Untuk setiap $(S + a), (S + b), (S + c) \in R/S$

$(S + a) \cdot [(S + b) + (S + c)] = [(S + a) + (S + b)] \cdot (S + c)$

$$(S + a) \cdot [S + (b + c)] = [S + (a + b)] \cdot (S + c)$$
$$(S + [a \cdot (b + c)]) = (S + [(a + b) \cdot c])$$
$$S + [(a \cdot b) + (a \cdot c)] = S + [(a \cdot c) + (b \cdot c)]$$
$$[(S + a) \cdot (S + b)] + [(S + a) \cdot (S + c)] = [(S + a) \cdot (S + c)] + [(S + b) \cdot (S + c)$$

Dengan kata lain jika R adalah suatu Ring dan S adalah suatu Ideal dari R, maka $R/S$ dikatakan suatu Ring Faktor jika memenuhi:

1. $(R/S\,,+)$ adalah suatu Grup Komutatif
2. $(R/S\,,\cdot)$ adalah suatu Semigrup
3. $(R/S\,,+,\cdot)$ adalah distributif perkalian terhadap penjumlahan

**Contoh**

Misal $K = \{0, 2, 4\}$ adalah Ideal yang dibangun oleh 2 di $Z_6$. Tunjukkan bahwa $Z_6/K$

**Penyelesaian**

Ada dua Ideal yang berbeda dari Ring $Z_6$

$K + 0 = K = \{0, 2, 4\}$

$K + 1 = \{1,3, 5\}$

$K + 2 = \{2, 4, 0\} = K$

$K + 3 = \{3, 5, 1\} = K + 1$

$K + 4 = \{4, 0, 2\} = K$

$K + 5 = \{5, 1, 3\} = K + 1$

Sehingga $Z_6/K = \{K, K + 1\}$

Tabel $Z_6/K = (Z_6/\{0, 2, 4\}, +)$ dan $Z_6/K = (Z_6/\{0, 2, 4\},\cdot)$

| + | K | K + 1 |
|---|---|---|
| K | K | K +1 |
| K + 1 | K + 1 | K |

| . | K | K + 1 |
|---|---|---|
| K | K | K |
| K + 1 | K | K + 1 |

Terhadap penjumlahan Terhadap perkalian

Grup Komutatif :

1. Tertutup terhadap penjumlahan di $Z_6/K$

   Untuk setiap $K, K + 1 \in Z_6/K$

   Berlaku $K + (K + 1) = K + (0 + 1) = K + 1$

   Sehingga,$K + 1 \in Z_6/K$

2. Assosiatif terhadap penjumlahan di $Z_6/K$

   Untuk setiap $K, K + 1 \in Z_6/K$

   $$[K + (K + 1)] + (K + 1) = K + [(K + 1) + (K + 1)]$$
   $$[K + (0 + 1)] + (K + 1) = K + [K + (1 + 1)]$$
   $$(K + 1) + (K + 1) = K + (K + 0)$$
   $$K + (1 + 1) = K + (0 + 0)$$
   $$K + 0 = K + 0$$
   $$K = K$$

   Sehingga

   $$[K + (K + 1)] + (K + 1) = K + [(K + 1) + (K + 1)] = K$$

3. Punya invers terhadap penjumlahan di $Z_6/K$

   Untuk setiap $K + 1 \in Z_6/K$

   $$(K + 1) + \big(K + (-1)\big) = K + \big(1 + (-1)\big) = K + 0 = K$$
   $$\big(K + (-1)\big) + (K + 1) = K + \big((-1) + 1\big) = K + 0 = K$$

   Sehingga

   $$(K + 1) + \big(K + (-1)\big) = \big(K + (-1)\big) + (K + 1) = K$$

4. Ada elemen identitas terhadap penjumlahan di $Z_6/K$

   Untuk setiap $K + 1 \in Z_6/K$

   $$(K + 0) + (K + 1) = K + (0 + 1) = K + 1$$
   $$(K + 1) + (K + 0) = K + (1 + 0) = K + 1$$

   Sehingga

   $$(K + 0) + (K + 1) = (K + 1) + (K + 0) = K + 1$$

5. Komutatif terhadap penjumlahan di $Z_6/K$

Untuk setiap $K, K+1 \in Z_6/K$

$K + (K+1) = (K+1) + K$

$K + (0+1) = K + (1+0)$

$K + 1 = K + 1$

Sehingga

$$K + (K+1) = (K+1) + K = K + 1$$

Semigrup :

1. Tertutup terhadap perkalian di $Z_6/K$

   Untuk setiap $K, K+1 \in Z_6/K$

   $K \cdot (K+1) = K + (0 \cdot 1) = K + 0 = K$

   Sehingga $K \in Z_6/K$

2. Assosiatif terhadap perkalian di $Z_6/K$

   Untuk setiap $K, K+1 \in Z_6/K$

   $[K \cdot (K+1)] \cdot (K+1) = K \cdot [(K+1) \cdot (K+1)]$

   $[K + (0 \cdot 1)] \cdot (K+1) = K \cdot [K + (1 \cdot 1)]$

   $(K+0) \cdot (K+1) = K \cdot (K+1)$

   $K + (0 \cdot 1) = K \cdot (0 \cdot 1)$

   $K + 0 = K + 0$

   $K = K$

   Sehingga

$$[K \cdot (K+1)] \cdot (K+1) = K \cdot [(K+1) \cdot (K+1)] = K$$

Distributif perkalian terhadap penjumlahan :

1. Distributif perkalian terhadap penjumlahan di $Z_6/K$

   Untuk setiap $K, K+1 \in Z_6/K$

   Misal $K = a, K+1 = b$ dan $K+1 = c$

$$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

$$K \cdot [(K+1) + (K+1)] = [K \cdot (K+1)] + [K \cdot (K+1)]$$

$$K \cdot [K + (1+1)] = [K + (0 \cdot 1)] + [K + (0 \cdot 1)]$$

$$K \cdot [K+0] = [K+0] + [K+0]$$

$$K + (0 \cdot 0) = K + (0+0)$$

$$K + 0 = K + 0$$
$$K = K$$

Sehingga

$$K \cdot [( K + 1) + (K + 1)] = [K \cdot (K + 1)] + [K \cdot (K + 1)] = K$$

Jadi, terbukti bahwa $Z_6/K = \{K, K + 1\}$ merupakan suatu Ring Faktor.

Sebenarnya dari tabel juga kita telah bisa mengetahui bahwa $\mathbf{Z_6/K}$ adalah merupakan Ring Faktor, karena hasil dari penjumlahan dan perkalian unsur-unsur $\mathbf{Z_6/K}$ menghasilkan unsur-unsur itu sendiri. Jadi bila K adalah suatu Ideal dan R adalah suatu Ring, maka kita dapat menentukan Ring Faktor dari R/K dengan membuat tabel daftar Cayley terhadap penjumlahan dan perkalian unsur-unsur dari R/K, yang disebut tabel Ring Faktor dari R/K.

**Contoh**

$Z_{12} = \{0, 1, 2, 3, \dots \dots \dots \dots \dots \dots , 11\}$ adalah ring dari bilangan-bilangan bulat modulo 12. Carilah banyaknya ideal yang berbeda dan banyaknya ring faktor dari masing-masing ideal.

Penyelesaian :

Ada empat Ideal yang berbeda dari Ring $Z_6$

1. $P = \{0, 6\}$

   $P + 0 = \{0, 6\}$ $\quad$ $P + 6 = \{6,0\} = P$

   $P + 1 = \{1,7\}$ $\quad$ $P + 7 = \{7,1\} = P + 1$

   $P + 2 = \{2, 8\}$ $\quad$ $P + 8 = \{8,2\} = P + 2$

   $P + 3 = \{3, 9\}$ $\quad$ $P + 9 = \{9,3\} = P + 3$

   $P + 4 = \{4, 10\}$ $\quad$ $P + 10 = \{10,4\} = P + 4$

   $P + 5 = \{5, 11\}$ $\quad$ $P + 11 = \{11,5\} = P + 5$

2. $Q = \{0, 4, 8\}$

   $Q + 0 = \{0, 4, 8\}$ $\quad$ $Q + 6 = \{6,\ 10, 2\} = Q + 2$

   $Q + 1 = \{1, 5, 9\}$ $\quad$ $Q + 7 = \{7, 11, 3\} = Q + 3$

   $Q + 2 = \{2, 6, 10\}$ $\quad$ $Q + 8 = \{8, 0, 4\} = Q + 0$

$\mathrm{Q} + 3 = \{3,\ 7, 11\}$ $\quad$ $\mathrm{Q} + 9 = \{9,1, 5\} = \mathrm{Q} + 1$

$\mathrm{Q} + 4 = \{4,\ 8, 0\} = Q + 0$ $\quad$ $\mathrm{Q} + 10 = \{10, 2, 6\} = \mathrm{Q} + 2$

$\mathrm{Q} + 5 = \{5,\ 9, 1\} = \mathrm{Q} + 1$ $\quad$ $\mathrm{Q} + 11 = \{11, 3, 7\} = \mathrm{Q} + 3$

3. $\mathrm{R} = \{0, 3, 6, 9\}$

$\mathrm{R} + 0 = \{0, 3, 6, 9\}$ $\quad$ $\mathrm{R} + 6 = \{6, 9, 0, 3\} = \mathrm{R} + 0$

$\mathrm{R} + 1 = \{1, 4, 7, 10\}$ $\quad$ $\mathrm{R} + 7 = \{7, 10, 1, 4\} = \mathrm{R} + 1$

$\mathrm{R} + 2 = \{2, 5, 8, 11\}$ $\quad$ $\mathrm{R} + 8 = \{8, 11, 2, 5\} = \mathrm{R} + 2$

$\mathrm{R} + 3 = \{3, 6, 9, 0\} = \mathrm{R} + 0$ $\quad$ $\mathrm{R} + 9 = \{9, 0, 3, 6\} = \mathrm{R} + 0$

$\mathrm{R} + 4 = \{4, 7, 10, 1\} = \mathrm{R} + 1$ $\quad$ $\mathrm{R} + 10 = \{10, 1, 4, 7\} = \mathrm{R} + 1$

$\mathrm{R} + 5 = \{5, 8, 11, 2\} = \mathrm{R} + 2$ $\quad$ $\mathrm{R} + 11 = \{11, 2, 5, 8\} = \mathrm{R} + 2$

4. $\mathrm{S} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

$\mathrm{S} + 0 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ $\quad$ $\mathrm{S} + 6 = \{6, 8, 10, 0, 2, 4\} = \mathrm{S} + 0$

$\mathrm{S} + 1 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ $\quad$ $\mathrm{S} + 7 = \{7, 9, 11, 1, 3, 5\} = \mathrm{S} + 1$

$\mathrm{S} + 2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 0\} = \mathrm{S} + 0$ $\quad$ $\mathrm{S} + 8 = \{8, 10, 0, 2, 4, 6,8\} = \mathrm{S} + 0$

$\mathrm{S} + 3 = \{3, 5, 7, 9, 11, 1\} = \mathrm{S} + 1$ $\quad$ $\mathrm{S} + 9 = \{9, 11, 1, 3, 5, 7\} = \mathrm{S} + 1$

$\mathrm{S} + 4 = \{4, 6, 8, 10, 0, 2\} = \mathrm{S} + 0$ $\quad$ $\mathrm{S} + 10 = \{10, 0, 2, 4, 6, 8\} = \mathrm{S} + 0$

$\mathrm{S} + 5 = \{5, 7, 9, 11, 1, 3\} = S + 1$ $\quad$ $\mathrm{S} + 11 = \{11, 1, 3, 5, 7, 9\} = \mathrm{S} + 1$

Sehingga ideal dan ring faktor pada $\mathrm{Z}_{12}$ dapat ditulis sebagai berikut :

| IDEAL | RING FAKTOR |
|---|---|
| P = $\{0, 6\}$ | $Z_{12}$/ P = {(0,6), (1,7), (2,8), (3,9), (4,10), (5,11)} |
| Q = $\{0, 4, 8\}$ | $Z_{12}$/ Q = {(0,4,8), (1,5,9), (2,6,10), (3,7,11)} |
| R = $\{0, 3, 6, 9\}$ | $Z_{12}$/ R = {(0, 3, 6, 9),(1,4,7,10), (2,5,8,11)} |
| S = $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ | $Z_{12}$/ S = {(0, 2, 4, 6, 8, 10), (1,3,5,7,9,11)} |

# BAB 7

# HOMOMORFISMA RING

# BAB 7
# HOMOMORFISMA RING

**Definisi 7. 1**

Misalkan (R,∘,∗) = Ring

(S,∘,∗) = Ring

Pemetaan $\phi$: R → S disebut homomorfisma ring, jika dan hanya jika $\forall\, x, y \in R$ berlaku:

i. $\phi(x+y) = \phi x + \phi y$
ii. $\phi(xy) = (\phi x)(\phi y)$

**Definisi 7. 1**

i. $\phi$ homomorfisma yang injektif ⟹ $\phi$ : monomorfisma
ii. $\phi$ homomorfisma yang surjektif ⟹ $\phi$ : epimorfisma
   Dan R : homomorfik dengan S (R ≈ S)
   S = peta homomorfik dari R
iii. $\phi$ homomorfisma yang bijektif ⟹ $\phi$ : isomorfisma
   Dan R : isomorfik dengan S (R ≅ S)

**Definisi 7. 2**

i. $\phi$ homomorfisma ke dirinya sendiri ⟹ $\phi$ : endomorfisma
ii. $\phi$ endomorfisma yang bijektif ⟹ $\phi$ : automorfisma

**Contoh**

1. Diketahui: (R, +,×) = Ring
   (S, +,×) = Ring
   Pemetaan $f: R \to S$ didefinisikan oleh : $f(x) = e'$ , $\forall\, x \in R$ dan $e'$ adalah elemen identitas dari S. Buktikan $f$ homomorfisma ring!

***Bukti***

Ambil sebarang $x, y \in R$

Maka, $f(x) = e'$

$f(y) = e'$

Karena $x, y \in R$ dan (R, +,×) = Ring

Maka $x + y \in R$

$x\ y \in R$

Sehingga $f(x + y) = e'$

$f(xy) = e'$

$f(x) + f(y) = e' + e' = e'$

$f(x) \cdot f(y) = e' \cdot e' = e'$

Jadi $f(x + y) = f(x) + f(y)$

$f(xy) = f(x) \cdot f(y)$

Kesimpulan: $f$ homomorfisma ring.

2. Diketahui: (K, +,×) = Ring bilangan kompleks

(M, +,×) = Ring matriks persegi berordo 2 dengan elemen-elemen bilangan Riil

Pemetaan $f: K \to M$ didefinisikan oleh : $f(a + bi) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ $\forall\ (a + bi) \in K$.

a. Apakah $f$ homomorfisma ring!

b. Apakah $f$ monomorfisma!

c. Apakah $f$ epimorfisme!

d. Apakah $f$ isomorfisme!

**Penyelesaian**

a. Ambil sebarang $x = a + bi$ dan $y = c + di \in K$

Maka, $f(x) = f(a + bi)$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$f(y) = f(c + di)$

$$= \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$$

Karena $x, y \in K$ dan (K, +,×) = Ring

Maka $x + y = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \in K$

$x\, y = (a + bi)\, (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i \in K$

Sehingga

$f(x + y) = f((a + c) + (b + d)i)$

$$= \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$$

$= f(a + bi) + f(c + di)$

$f(x + y) = f(x) + f(y)$

$f(xy) = f((ac - bd) + (bc + ad)i\,)$

$$= \begin{bmatrix} ac-bd & bc+ad \\ -bc-ad & ac-bc \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$$

$= f(a + bi) \cdot f(c + di)$

$f(xy) = f(x) \cdot f(y)$

Jadi $f$ homomorfisma ring.

b. $f$ injektif?

$f: K \to M$ injektif jika dan hanya jika $\forall a, b \in K$ dengan

i. $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

ii. $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

<u>Bukti :</u>

i. Ambil sebarang $a = x + yi$ dan $b = p + qi \in K$ dengan $f(a) = f(b)$

Dari $f(a) = f(b)$

$f(x + yi) = f(p + qi)$

$\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix}$

Didapat: $x = p$

$y = q$

Karena $a = x + yi \quad \rightarrow x = p, y = q$

$= p + qi$

$a = b$

Sehingga $f$ injektif.

Jadi, $f$ monomorfisma.

c. $f$ Surjektif?

$f: K \rightarrow M$ surjektif jika dan hanya jika $\forall y \in M, \exists\, x \in K \ni g(x) = y$

Ambil sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ -c & d \end{bmatrix} \in M$

Maka $\exists\ a + bi \in K \ni g(a + bi) = \begin{bmatrix} a & b \\ -c & d \end{bmatrix}$

Sehingga $f$ surjektif.

Jadi, $f$ epimorfisma.

d. $f$ Bijektif?

i. $f$ injektif

ii. $f$ surjektif

Maka $f$ bijektif.

Jadi, $f$ isomorfik.

Bukti :

i. Ambil sebarang $a = x + yi$ dan $b = p + qi \in K$ dengan $f(a) = f(b)$

Dari $f(a) = f(b)$

$f(x + yi) = f(p + qi)$

$\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix}$

Didapat: $x = p$

$y = q$

Karena $a = x + yi \rightarrow x = p, y = q$

$= p + qi$

$a = b$

Sehingga $f$ injektif.

Jadi, $f$ monomorfisma.

**<u>Teorema 7. 1</u>**

Misalkan $\phi$ homomorfisma dari ring $R \rightarrow$ ring $S$ dan A subring sebuah $R$ dan $B$ ideal dari $S$.

maka berlaku sifat-sifat:

1. $\phi(0) = 0$
2. $\phi(-a) = -\phi(a)$, untuk semua $a \in R$.

***Bukti***

1. Jika $a$ sebarang elemen di $R$, maka

$\phi(a) = \phi(a + 0)$ → sifat elemen nol

$= \phi(a) + \phi(0)$ → karena$\phi$ homomorfisma ring

Dan $\phi(a) = \phi(0 + a)$ → sifat elemen nol

$= \phi(0) + \phi(a)$ → karena $\phi$ homomorfisma ring

Jadi diperoleh,

$\phi(a) + \phi(0) = \phi(a) = \phi(0) + \phi(a)$ untuk setiap $\phi(a) \in S$.

Ini berarti $\phi(0) = 0$ yaitu elemen netral (nol) di dalam ring $S$.

2. Jika $a$ sebarang elemen di ring $R$,

Maka $0 \; = \; \phi(0)$ → sifat 1

$= \phi(a + (-a))$ → sifat elemen invers terhadap +

$= \phi(a) \; + \; \phi(-a)$ → karena $\phi$ homomorfisma ring

dan $\quad 0 \; = \; \phi(0)$ → sifat 1

$= \phi(-a + a)$ → sifat elemen invers terhadap +

$= \phi(-a) \; + \; \phi(a)$ → karena $\phi$ homomorfisma ring

Jadi diperoleh $\phi(a) \; + \; \phi(-a) = 0 = \phi(-a) \; + \; \phi(a)$ untuk setiap $\phi(a) \in S$.

Ini berarti $\phi(-a) = -\phi(a)$, untuk semua $a \in R$.

3. $A\phi = \{a\phi \mid a \in A\}$ adalah subring dari $S$.

*Bukti*

Diketahui $A$ subring dari $R$. Berarti $A$ merupakan grup penjumlahan.

Himpunan $\phi(A)$ dengan operasi penjumlahan dalan $S$ adalah subgrup dari $S$.

Jika $\phi(a_1), \phi\,(a_2) \in \phi\,(A), a_1, a_2 \in A \subseteq S$

Maka $\phi(a_1)\,\phi\,(a_2) = \phi\,(a_1 a_2)$, karena $\phi$ homomorfisma. Padahal $(a_1 a_2) \in \phi(A)$.

Maka $\phi(a_1)\,\phi\,(a_2) \in \phi(A)$, sehingga $\phi(A)$ tertutup perhadap perkalian.

Jadi $\phi(A)$ merupakan subring dari $S$.

4. Jika $R$ memiliki elemen kesatuan $e$, $S \neq \{0\}$ dan $\phi$ onto, maka $e\phi$ elemen kesatuan dari $S$.

*Bukti*

Akan ditunjukkan bahwa $s\phi\,(e) = \phi\,(e)s = s$ untuk setiap $s \in S$.

Diberikan $s \in S$, karena $\phi$ surjektif, ada paling sedikit satu elemen $r \in R$

Sehingga $\phi\,(r) = s$.

Karena 1 elemen satuan $R$ dan berlaku $re = er = r$, Maka $\phi\ (re) = \phi\ (er) = \phi\ (r)$.

Dari perkalian pada pemetaan $\phi$ yang merupakan homomorfisma

maka $\phi\ (re) = \phi(r)\ \phi(e) = \phi(e)\phi(r) = \phi(r)$

sehingga berlaku $s\phi(e) = \phi(e)s = s$, dimana $\phi(e)$ elemen satuan s.

**<u>Teorema 7.2</u> (Kernel adalah Ideal)**

Misalkan $\phi$ homomorfisma dari ring $R \rightarrow$ ring $S$. Maka Ker $\phi = \{r \in R \mid r\phi = 0\}$ ideal dari $R$.

***Bukti***

Jelas bahwa $ker(\phi)$ bukan merupakan himpunan kosong, karena $ker\ (\phi)$ paling sedikit memuat satu elemen yaitu 0, elemen nol di $R$ (ingat: $\phi(0) = 0$).

Ambil sebarang elemen $a, b \in ker(\phi)$ dan $r \in R$,

Sehingga $\phi(a) = 0$ dan $\phi(b) = 0$.

Akibatnya diperoleh:

$\phi(a - b) = \phi\big(a + (-b)\big) = \phi(a) + \phi(-b) = \phi(a) - \phi(b) = 0 - 0 = 0.$

Ini berarti $a - b \in ker(\phi)$

Selanjutnya $\phi(ar) = \phi(a) \cdot \phi(r) = 0 \cdot \phi(r) = 0$ dan $\phi(ra) = \phi(r) \cdot \phi(a) = \phi(r)\ 0 = 0$. Yang menunjukkan bahwa $ar, ra \in ker(\phi)$

Jadi $ker(\phi)$ merupakan ideal dari ring R.

**<u>Teorema 7.3</u> (Homomorfisma dari *Z* ke Ring dengan elemen kesatuan)**

Misalkan $R$ ring dengan elemen kesatuan $e$. Pemetaan $\phi: Z \rightarrow R$ diberikan oleh $n \rightarrow ne$ homomorfisma ring.

***Bukti***

Misalkan $m, n \in Z$. Untuk menunjukkan bahwa penambahan dipertahankan, kami mempertimbangkan tiga kasus. Pertama anggaplah bahwa kedua *m* dan *n* yang positif. Maka

$(m + n)\phi = (m + n)e = \underbrace{e + e + \ldots\ldots + e}_{(m+n)\text{ faktor}}$

$$= \underbrace{(e+e+\ldots\ldots+e)}_{m\text{ faktor}} + \underbrace{(e+e+\ldots\ldots+e)}_{n\text{ faktor}}$$

$$= me + ne = m\phi + n\phi$$

Kemudian, anggaplah bahwa kedua $m$ dan $n$ yang negatif. Maka,

$$(m+n)\phi = (m+n)e = (-m-n)(-e)$$

$$= (-m)(-e) + (-n)(-e)$$

$$= me + ne = m\phi + n\phi$$

Ketiga, anggaplah bahwa salah satu dari $m$ dan $n$ adalah positif dan yang lainnya adalah negatif, sehingga $m \geq 0, n < 0$. Maka

$$(m+n)\phi = (m+n)e = \underbrace{(e+e+\ldots\ldots+e)}_{m\text{ faktor}} - \underbrace{(e+e+\ldots\ldots+e)}_{(-n)\text{ faktor}}$$

$$= me + (-n)(-e) = me + ne = m\phi + n\phi$$

Jadi, $\phi$ mempertahankan penambahan.

Perkalian dapat ditangani dari latihan sebelunya, yang mengatakan $(ma)(nb) = (mn)(ab)$ untuk semua bilangan bulat $m$ dan $n$. Dengan demikian,

$(mn)\phi = (mn)e = (me)(ne) = (m\phi)(n\phi)$. Jadi, $\phi$ mempertahankan perkalian juga.

**<u>Teorema 7.4</u>**

Diberikan sebarang ring R dan ideal I dari R. Dibentuk ring faktor $R/_I$ dan didefinisikan pemetaan $v : R \to R/_I$, yaitu untuk setiap $r \in R$.

$$v(r) = r + 1$$

Pernyataan-pernyataan berikut ini berlaku:

1. $v$ merupakan homomorfisma ring (Homomorfisma $v$ disebut **homomorfisma natural**)
2. $v$ bersifat surjektif, dan
3. $ker\ (v) = I$
4. Untuk sebarang ideal $I$ dari ring $R$ dapat dibentuk ring faktor $R/_I$. Misal diberikan sebarang subring $S$ dan $R$ yang memuat $I$. Oleh karena itu, $I$ juga merupakan ideal dari $S$, dan berakibat dapat dibentuk juga ring faktor $R/_I$. Teorema dibawah ini menjelaskan adanya korespondensi satu-satu antara

himpunan semua subring dari $R$ yang memuat $I$ dan himpunan semua subring dari $R/_I$.

**Teorema 7.5**

Diberikan sebarang ring R. Jika I adalah ideal dari R, maka terdapat korespondensi satu-satu antara himpunan semua subring dari R yang memuat I dan himpunan semua subring dari $\mathrm{R}/_\mathrm{I}$.

***Bukti***

Misalkan

$$A = \{S | S \text{ adalah subring dari } R \,.\, I \subseteq S\}$$

Dan

$$B = \left\{K/_I \,\middle|\, K/_I \text{ adalah subring dari } R/_I\right\}.$$

Didefinisikan pemetaan $f : A \to B$, yaitu untuk setiap $S \in A$.

$$f(S) = S/_I = Im(v|s),$$

Dengan $v$ adalah homomorfisma natural dari $S$ ke $S/_I$. Mudah ditunjukkan bahwa $f$ merupakan pemetaan (sebagai latihan). Selanjutnya harus ditunjukkan bahwa $f$ bersifat injektif (sebagai latihan). Langkah terakhir harus ditunjukkan bahwa $f$ bersifat surjektif. Diambil sebarang $T \in B$. Mudah dipahami bahwa $v^{-1}(T) \in A$ dan $f\left(v^{-1}(T)\right) = T$, sehingga $f$ bersifat surjektif. Oleh karena itu, $f$ merupakan korespondensi satu-satu antara A dan B.

Misal diberikan homomorfisma ring $f : R_1$ dan $R_2$. Telah kita ketahui bahwa $\ker(f)$ merupakan ideal dari $R_1$. Oleh karena itu dapat dibentuk ring faktor $R/_{\ker(f)}$.

- **Teorema Utama (Fundamental) Homomorfisma Ring dan Aplikasinya**

Berikut ini merupakan teorema yang menjelaskan hubungan antara $R/_{\ker(f)}$ dan $Im(f)$. Teorema ini dikenal dengan Teorema Utama Homomorfisma Ring (TUHR).

**Teorema 7.6**

Jika $f$ adalah homomorfisma dari ring $R_1$ ke ring $R_2$, maka :

$$R/_{\ker(f)} \cong Im(R_1).$$

***Bukti***

Akan ditunjukkan terdapat suatu homomorfisma ring dari $R/_{\ker(f)}$ ke $Im(f)$. Dibentuk pemetaan $\varphi : R/_{\ker(f)} \to Im(f)$, yaitu untuk setiap $r + ker(f) \in R/_{\ker(f)}$.

(a) $\varphi$ merupakan pemetaan

(b) $\varphi$ merupakan homomorfisma ring

(c) $\varphi$ bersifat injektif, dan

(d) $\varphi$ bersifat surjektif.

Selanjutnya akan diberikan aplikasi dan Teorema Utama Homomorfisma Ring. Misal $I$ dan $J$ masing-masing merupakan ideal dari ring $R$. Dari pembahasan bab sebelumnya, diperoleh $I \cap J$ dan $I + J$ masing-masing merupakan ideal di $R$. Mudah dipahami bahwa $I \cap J \subseteq I$ dan $J \subseteq I + J$, sehingga $I \cap J$ merupakan ideal dari $I$ dan $J$ merupakan ideal dari $I + J$. Akibatnya, dapat dibentuk ring faktor $I/_{(I \cap J)}$ dan $(I + J)/_J$.

**Teorema 7.7**

Diberikan sebarang ring R. Jika I dan J masing-masing merupakan ideal dari R, maka

$$I/_{(I \cap J)} \cong (I + J)/_J$$

***Bukti***

Untuk membuktikan teorema ini dapat memanfaatkan TUHR, yaitu cukup ditunjukkan terdapat suatu homomorfisma $f : I \to {(I+J)}/{J}$ yang memenuhi sifat:

a) $\ker(f) = I \cap J$ b) $Im(f) = {(I+J)}/{J}$

Dibentuk pemetaan $f : I \to {(I+J)}/{J}$, yaitu untuk setiap $a \in I, f(a) = a + J$. Harus ditunjukkan: (sebagai latihan)

(i) $f$ merupakan pemetaan,

(ii) $f$ merupakan homomorfisma ring.

(iii) $\ker(f) = I \cap J$

(iv) $Im(f) = {(I+J)}/{J}$

Untuk aplikasi selanjutnya, misalkan $I$ dan $J$ masing-masing merupakan ideal dari ring $R$ dengan $J \subset I$. Dari kedua ideal tersebut dapat dibentuk beberapa ring faktor:

(i) ${R}/{I} = \{\bar{r} = r + I | r \in R\}$

(ii) ${R}/{J} = \{\bar{r} = r + J | r \in R\}$, dan

(iii) ${I}/{J} = \{\bar{r} = r + J | r \in I\}$.

Mengingat $I \subset R$, diperoleh ${I}/{J} \subset {R}/{J}$. Dapat ditunjukkan bahwa ${I}/{J}$ merupakan ideal dari ${R}/{J}$ (sebagai latihan). Oleh karena itu, terbentuk ring faktor

$$\left({R}/{J}\right) \Big/ \left({I}/{J}\right) = \left\{r = r + {I}/{J} \middle| r \in {R}/{J}\right\}$$

**<u>Teorema 7.8</u>**

Diberikan sebarang ring R. Jika I dan J masing – masing merupakan ideal dari R degan I ⊂ J, maka

$$\left({R}/{J}\right) \Big/ \left({I}/{J}\right) \cong {R}/{I}$$

***Bukti***

Untuk membuktikan teorema ini dapat memanfaatkan TUHR, yaitu cukup ditunjukkan terdapat suatu homomorfisma $f\colon {}^{R}/_{J} \rightarrow {}^{R}/_{I}$ yang memenuhi sifat:

a. $ker(f\ ) = {}^{I}/_{J}$

b. $I\,m(f\ ) = {}^{R}/_{I}$

Dibentuk pemetaan dengan $f\colon {}^{R}/_{J} \rightarrow {}^{R}/_{I}$ definisikan

$f\ (r + J\ ) = r + I\ ,$

untuk setiap $r = r + J \in {}^{R}/_{J}$ .

a. $f$ merupakan pemetaan,

b. $f$ merupakan homomorfisma ring,

c. $ker(f) = {}^{I}/_{J}$ . dan

d. $Im(f) = {}^{R}/_{I}$.

## LATIHAN SOAL

1. Jika $f : R \rightarrow S$ merupakan homomorfisma ring, maka buktikan bahwa $ker(f) = \{0\}$ jika dan hanya jika $f$ satu-satu.
2. Misalkan $J(\sqrt{2})$ adalah himpunan bilangan real yang berbentuk $m + n\sqrt{2}$ , dengan $m$ dan $n$ bilangan bulat.
   a. Tunjukkan bahwa $J(\sqrt{2})$ terhadap penjumlahan dan perkalian bilangan real merupakan ring komutatif dengan elemen satuan!
   b. Didefinisikan $\phi : J(\sqrt{2}) \rightarrow J(\sqrt{2})$ dengan $\phi(m + n\sqrt{2} = m - n\sqrt{2}$, tunjukkan bahwa $\phi$ suatu epimorfisma!
   c. Tentukan $ker(\phi)$ !
3. Misalkan R adalah ring dari himpunan semua fungsi kontinu bernilai real pada interval [0,1] terhadap operasi penjumlahan dan perkalian fungsi, sedangkan F adalah ring dari bilangan real. Didefinisikan $\phi : R \rightarrow F$ dengan $\phi(f(x)) = f(\ ½\ )$.

a. Tunjukkan bahwa $\phi$ merupakan epimorfisma!

b. Tentukan $ker(\phi)$!

## DAFTAR PUSTAKA


Gallian, Joseph. 1990. Contemporary Abstract Algebra:Secn Edition.Duluth: University of Minnesota.

Mas'oed, Fadli. 2013. *Struktur Aljabar*. Palembang : Akademia Permata.

Prihandoko, Antonius C. 2009. *Pengantar Teori RING dan Implementasinya*. Jember : DIA-Bermutu 2009 Program Studi Pendidikan Matematika Jurusan Pendidikan MIPA FAkultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Rasiman. -. *STRUKTUR ALJABAR Fakultas Pendidikan matematika dan ilmu pengetahuan alam*. Semarang: IKIP PGRI SEMARANG

Setiawan, Adi. 2008. *Aljabar 2*. Salatiga untuk kalangan sendiri.

Setiawan, Adi. 2011. *Aljabar Abstrak (Teori Grup dan Teori Ring)*. Salatiga. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Matematika Universitas Kristen Satya Wacana.

Wahyuni, Sri, Dkk. 2013.Pengantar Struktur Aljabar II. Universitas Gadjah Mada: Yogyakarta.

Wahyuni, Sri, Indah Emilia, Diah Junia. 2013. Pengantar Struktur Aljabar II: Daerah Integral dan Lapangan. Yogyakarta : UGM