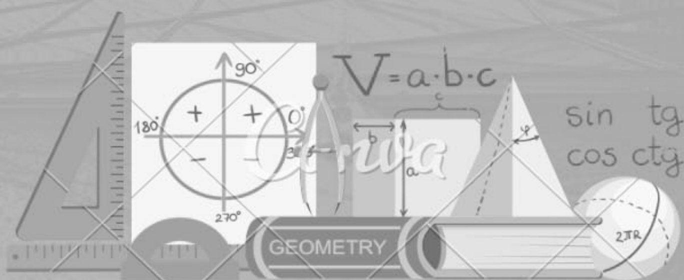
GEOMETRI TRANSFORMASI



Aryo Andri Nugroho, S.Si., M.Pd
Noviana Dini rahmawati, M.Pd
Kartinah, S.Si., M.Pd

Judul Buku:

GEOMETRI TRANSFORMASI

Penulis:
Aryo Andri Nugroho, S.Si., M.Pd
Noviana Dini Rahmawati, M.Pd
Kartina, S.Si., M.Pd

ISBN: 978-602-0960-69-2

Penerbit:
UPGRS Press

Redaksi:
Cetakan Pertama, Juli 2018

KATA PENGANTAR

Puji dan Syukur kami panjatkan ke Hadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena berkat limpahan Rahmat dan KaruniaNYA sehingga kami dapat menyusun bahan ajar geometri transformasi ini dengan baik dan tepat pada waktunya. Dalam bahan ajar geometri transformasi ini kami membahas mengenai fungsi dan transformasi, pencerminan, isometri, hasilkali transformasi, transformasi balikan, setengah putaran, translasi dan rotasi.

Bahan ajar geometri transformasi ini dibuat dengan berbagai observasi dan beberapa bantuan dari berbagai pihak untuk membantu menyelesaikan tantangan dan hambatan selama mengerjakan bahan ajar geometri transformasi ini. Oleh karena itu, kami mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyusunan bahan ajar geometri transformasi ini.

Kami menyadari bahwa masih banyak kekurangan yang mendasar pada bahan ajar geometri transformasi ini. Oleh karena itu kami mengundang pembaca untuk memberikan saran serta kritik yang dapat membangun kami. Kritik konstruktif dari pembaca sangat kami harapkan untuk penyempurnaan bahan ajar geometri transformasi selanjutnya.

Akhir kata semoga bahan ajar geometri transformasi ini dapat memberikan manfaat bagi kita sekalian.

Semarang, Juli 2018

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
FUNGSI DAN TRANSFORMASI

A. Sub – CPMK

Mahasiswa memahami fungsi dan transformasi

B. Gambaran Umum Materi

Pada bab ini mahasiswa akan belajar tentang materi fungsi terlebih dahulu sebagai prasyarat mempelajari materi transformasi. Pada materi transformasi akan dipelajari syarat – syarat dikatakan sebuah transformasi yaitu merupakan fungsi dan fungsi bijektif (fungsi surjektif dan fungsi injektif).

C. Relevansi Terhadap Pengetahuan Mahasiswa dan Bidang Kerja

Dengan mempelajari materi transformasi, mahasiswa akan memahami materi transformasi karena materi transformasi akan digunakan sebagai prasyarat mempelajari materi berikutnya.

D. Sub Bab

1. Pengertian Fungsi

Suatu fungsi pada V adalah suatu padanan yang mengaitkan setiap anggota V dengan satu anggota V. Jika f adalah fungsi dari V ke V yang mengaitkan setiap $x \in V$ dengan $y \in V$ maka ditulisa $y = f(x)$, x dinamakan prapeta dari y oleh f dan y dinamakan peta dari x oleh f. daerah asal fungsi tersebut adalah V dan daerah nilainya juga V. fungsi yang demikian dinamakan fungsi pada f.

2. Jenis-Jenis Fungsi Yang Akan Dibahas

a. Fungsi yang surjektif

Fungsi yang surjektif adalah fungsi yang bersifat setiap $B \in V$ terdapat A sebagai prapeta B, atau $\forall B \in V \exists A \in V \ni f(A) = B$

B merupakan peta dari A oleh f dan A merupakan prapeta dari B oleh f.

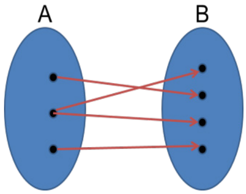
b. Fungsi yang injektif

Fungsi yang injektif adalah fungsi yang bersifat, jika $P \neq Q$, maka $f(P) \neq f(Q)$, ekuivalen dengan ungkapan , jika $f(P) = f(Q)$ maka $P = Q$

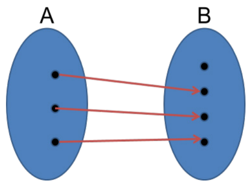
c. Fungsi yang bijektif

Fungsi yang bijektif adalah fungsi yang bersifat surjektif dan injektif

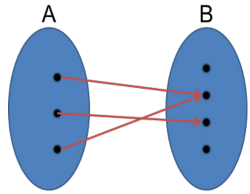
Perhatikan beberapa contoh fungsi dan bukan fungsi seperti berikut.



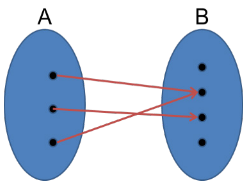
(a) Fungsi/Bukan Fungsi



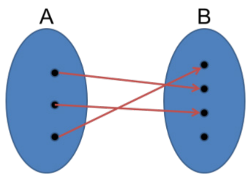
(b) Fungsi/Bukan Fungsi



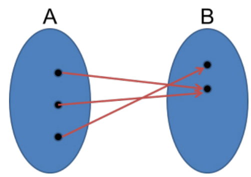
(c) Fungsi/Bukan Fungsi



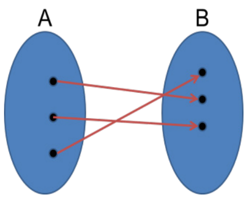
(d) Fungsi Injektif/Bukan



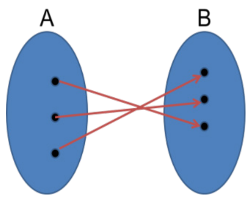
(e) Fungsi Injektif/Bukan



(f) Fungsi Surjektif/Bukan



(g) Fungsi Surjektif/Bukan



(h) Fungsi Bijektif/Bukan

3. Transformasi

Suatu transformasi pada suatu bidang V adalah suatu fungsi yang bijektif dengan daerah asalnya V dan daerah nilainya V juga. Suatu padanan pada V adalah suatu transformasi jika memenuhi prasyarat sebagai berikut.

a. Padanan tersebut merupakan suatu fungsi

b. Padanan tersebut bersifat surjektif

c. Padanan tersebut bersifat injektif

Contoh 1

Andaikan A $\in V$. Ada padanan T dengan daerah asal V dan daerah nilai juga V.

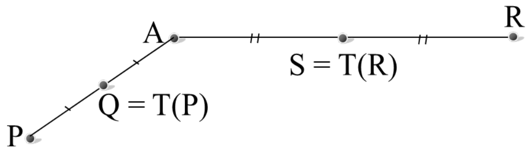
Jadi T : V $\rightarrow$ V yang didefinisikan sebagai berikut :

a. T(A) = A

b. Apabila P$\neq$A, maka T(P) = Q dengan Q titik tengah garis $\overline{AP}$.

Selidiki apakah padanan T tersebut suatu transformasi ?

Jawab :



a. Jelas bahwa A memiliki peta, yaitu A sendiri.

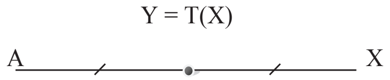
   Ambil sebarang titik R$\neq A$ pada V. Oleh karena V bidang Euclides, maka ada satu garis yang melalui A dan R, jadi ada satu ruas garis $\overline{AR}$ sehingga ada tepat satu titik S dengan S antara A dan R, sehingga AS = SR.

   Ini berarti untuk setiap X $\in$ V ada satu Y dengan Y = T(X) yang memenuhi persyaratan (b). Jadi daerah asal T adalah V.

b. Apakah T surjektif ,atau apakah daerah nilai T juga V ?

   Untuk menyelidiki ini cukuplah dipertanyakan apakah setiap titik di V memiliki prapeta. Jadi apabila Y$\in V$ apakah ada X $\in V$ yang bersifat T(X) = Y ?

   Menurut ketentuan pertama, kalau Y = A prapetanya adalah A sendiri, sebabT(A) = A.

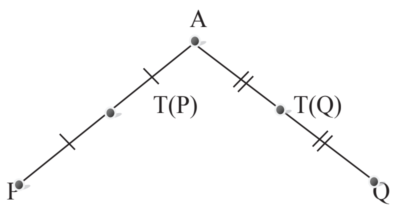


   Apabila Y$\neq$ A, maka oleh karena V suatu bidang Euclides, ada X tunggal dengan X $\in$ $\overleftrightarrow{AY}$ sehingga AY = YX. Jadi Y adalah titik tengah $\overline{AX}$ yang merupakan satu-satunya titik tengah. Jadi Y = T(X).

   Ini berarti bahwa X adalah prapeta dari titik Y. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa setiap titik pada V memiliki prapeta. Jadi T adalah suatu padanan yang surjektif.

c. Apakah T injektif ?

   Untuk menyelidiki ini ambillah dua titik $P \neq A, Q \neq A$ dan $P \neq Q$. P,Q,A tidak segaris (kolinear). Kita akan menyelidiki kedudukan T(P) dan T(Q).



Andaikan T(P) = T(Q)

Oleh karena T(P) $\in \overleftrightarrow{AP}$ dan $T(Q) \in \overleftrightarrow{AQ}$ maka dalam hal ini $\overleftrightarrow{AP}$ dan $\overleftrightarrow{AQ}$ memilki dua titik sekutu yaitu A dan T(P) = T(Q). ini berarti bahwa garis $\overleftrightarrow{AP}$ dan $\overleftrightarrow{AQ}$ berimpit, sehingga mengakibatkan bahwa $Q \in \overleftrightarrow{AP}$.

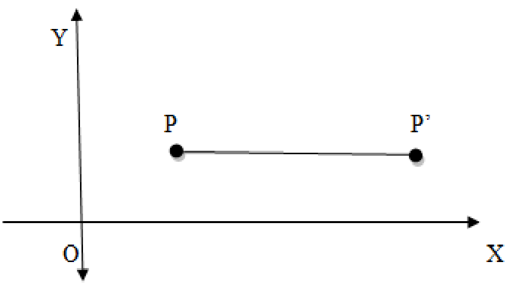
Ini berlawanan dengan pemisalan bahwa A, P, Q tidak segaris. Jadi pengandaian bahwa T(P) = T(Q) tidak benar sehingga haruslah T(P) ≠ T(Q). Jadi, T injektif.

Dari uraian di atas tampak bahwa padanan T itu injektif dan surjektif, sehingga T adalah padanan yang bijektif. Dengan demikian terbukti T suatu transformasi dari V ke V. Ditulis T : V → V.

Contoh 2

Pada bidang Euclides V terdapat suatu sistem koordinat ortogonal. T adalah padanan yang mengkaitkan setiap titik P dengan P' yang letaknya satu satuan dari P dengan arah sumbu X yang positif. Selidiki apakah T suatu transformasi ?

Jawab:



Jika P = (x,y) maka T(P) = P' dan P'= (x+1,Y).

Jelas daerah asal T adalah seluruh bidang V.

Adb T surjektif dan T injektif.

Misalkan A = (x,y).

Andaikan B= (x', Y').

(i) Jika B prapeta titik A(x,y) maka haruslah berlaku T(B) = (x' +1, y').

Jadi x'+1 = x, y'= y.

$$\text{atau} \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y \end{cases}$$

Jelas T (x-1,y) = ((x-1)+1,y) = (x,y).

Oleh karena x', y' selalu ada, untuk semua nilai x,y maka B selalu ada sehingga T(B)=A.

Karena A sebarang maka setiap titik di V memiliki prapeta yang berarti bahwa T surjektif.

(ii) Andaikan $P(x_1,y_1)$ dan Q (x_2,y_2) dengan $P \neq Q$.

Dipunyai $T(P) = (x_1+1,y_1)$ dan $T(Q) = (x_2+1,y_2)$.

Jika T(P) = T(Q), maka $(x_1+1,y_1) = (x_2+1,y_2)$.

Jadi $x_1+1 = x_2+1$, dan $y_1 = y_2$. Ini berarti $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$.

Jadi P = Q.

Terjadi kontradiksi, sehingga pengandaian salah. Jadi haruslah T(P) ≠ T(Q).

Jadi T injektif.

Dari (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa T adalah padanan yang bijektif.

Jadi T merupakan suatu transformasi dari V ke V.

Contoh 3

Andaikan g dan h dua garis yang sejajar pada bidang euclides V. A sebuah titik yang terletakdi tengah antara g dan h. Sebuah T padanan dengan daerah asal g yang didefinisikan sebagai berikut:

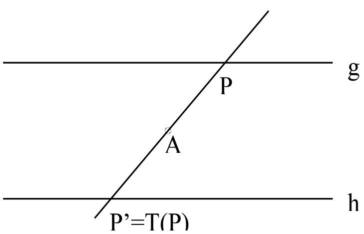
Apabila $P \in g$ maka $P' = T(P) = \overleftrightarrow{PA} \cap h$

a. Apakah daerah nilai T ?

b. Apabila $D \in g, E \in g, D \neq E$, buktikan bahwa $D'E' = DE$; $D' = T(D), E' = T(E)$

c. Apakah T injektif

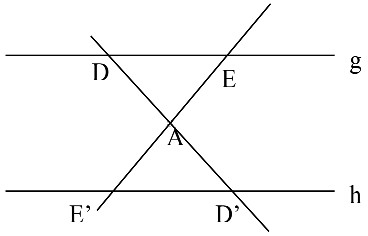
Jawab:



a. Daerah nilai T adalah h

b. $D \in g, E \in g, D \neq E$

$D' = T(D), E' = T(E)$



Perhatikan segitiga ADE dan segitiga AD’E’

$m(\angle DAE) = m(\angle D'AE')$ (Bertolak belakang)

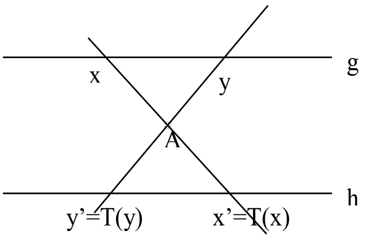
$DA = AD'$ (Karena A tengah-tengah $g$dan h)

$EA = AE'$ (Karena A tengah-tengah $g$dan h)

Diperoleh$\Delta ADE \cong \Delta AD'E'$ menurut definisi sisi sudut sisi

Akibatnya $D'E = DE$

c. Akan dibuktikan T injektif



Ambil dua titik X dan Y pada g, $X \neq Y$

Akan dibuktikan $T(X) \neq T(Y)$

Andaikan $T(X) = T(Y)$

Oleh karena $T(X) = \overleftrightarrow{XA} \cap h$ dan $T(Y) = \overleftrightarrow{YA} \cap h$

Dalam hal ini $\overleftrightarrow{XA}$ dan $\overleftrightarrow{YA}$ memiliki dua titik sekutu yaitu A dan $T(X) = T(Y)$.

Ini berarti bahwa garis $\overleftrightarrow{XA}$ dan $\overleftrightarrow{YA}$ berimpit, sehingga berakibat $X = Y$.

Hal ini suatu kontradiksi, haruslah $T(X) \neq T(Y)$

Jadi T injektif

E. Tugas Kelompok

Diketahui tiga titik A, R, S yang berlainan dan tidak segaris. Ada padanan T yang dedefinisikan sebagai berikut:

T(A) = A, T(P) = P' sehingga P titik tengah $\overline{AP'}$

a. Lukislah R' = T(R)

b. Lukislah Z sehingga T(Z) = S

c. Apakah T suatu transformasi?

F. Tes Formatif

1. Diketahui sebuah titik K dan ruas garis $\overline{AB}$, $K \notin \overline{AB}$ dan sebuah garis g sehingga g // $\overleftrightarrow{AB}$ dan jarak K dan $\overleftrightarrow{AB}$, adalah dua kali lebih panjang dari pada jarak antara K dan g. Ada padanan T dengan daerah asal $\overline{AB}$ dan daerah nilai g sehingga apabila $P \in \overline{AB}$ maka $T(P) = P' = \overleftrightarrow{KP} \cap g$.

   a. Apakah bentuk himpunan peta-peta P' kalau P bergerak pada $\overline{AB}$

   b. Buktikan bahwa T injektif.

   c. Apabila E dan F dua titik pada $\overline{AB}$, apakah dapat dikatakan tentang jarak E'F' jika E' = T(E) dan F' = T(F)?

2. Diketahui P = (0,0), $C_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

   $C_2 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 25\}$

   T : $C_1 \to C_2$ adalah suatu padanan yang definisikan sebagai berikut : Apabila $X \in C_1$ maka $T(X) = X' = \overleftrightarrow{PX} \cap C_2$

   a. Apabila A = (0,1) tentukan T(A)

   b. Tentukan prapeta dari B(4,3)

   c. Apabila Z sebarang titik pada daerah asal T, tentukan jarak ZZ', dengan Z' = T(Z).

   d. Apabila E dan F dua titik pada daerah asal T , apakah dapat dikatakan tentang jarak E'F'?

3. Diketahui f : V $\rightarrow$ V. Jika P(x,y) maka f(P) =(|x|,|y|)

   a) Tentukan f(A) jika A = (-3,6)

   b) Tentukan semua prapeta dari titik B(4,2)

   c) Apakah bentuk daerah nilai f ?

   d) Apakah f suatu transformasi ?

G. Tindak Lanjut

Buatlah catatan individu berkaitan dengan materi yang dipelajari dalam bab ini menggunakan bahasa sendiri

H. Daftar Pustaka

Eccles, Frank M. 1971. *An Introduction to Transformational Geometry Addison*. Wesley Publishing Company, Reading Massachusets.

Herstein, I.N. 1975. *Topics in Algebra*. New York: John Wiley & Sons.

Martin, George E. 1982. *Transformation Geometry*. New York: Springer-Verlag.

______________. 1975. The *Foundations of Geometry and The Non-Euclidean Plane*. New York: Springer-Verlag.

Rawuh. 1994. *Geometri Transformasi*. Semarang: Universitas Negeri Semarang

Susanta, B. 1990. *Geometri Transformasi*. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.

Yaglom, I.M. 1962. *Geometric Transformations I*. New York: Random House.

BAB II
PENCERMINAN

A. Sub – CPMK

Mahasiswa memahami pencerminan (*refleksi*)

B. Gambaran Umum Materi

Pada bab ini mahasiswa akan belajar tentang materi pencerminan (*refleksi*) yaitu transformasi yang memetakan suatu titik pada bangun datar dengan menggunakan sifat pada bayangan pada cermin datar sehingga akibatnya akan terbentuk bayangan baru dengan bentuk yang sama dengan bentuk semula.

C. Relevansi Terhadap Pengetahuan Mahasiswa dan Bidang Kerja

Dengan mempelajari materi pencerminan, mahasiswa akan memahami konsep materi pencerminan sehingga dapat digunakan sebagai bekal mahasiswa saat mempelajari materi berikutnya yang berkaitan dengan pencerminan beserta aplikasinya.

D. Sub Bab

Definisi 2.1

Suatu pencerminan (reflexi) pada sebuah garis s adalah suatu fungsi M_s yang didefinisikan untuk setiap titik pada bidang V sebagai berikut:

a. Jika $P \in s$ maka $M_s(P) = P$
b. Jika $P \notin s$ maka $M_s(P) = P'$ sehingga garis s adalah sumbu $\overline{PP'}$. Pencerminan M pada garis s selanjutnya dilambangkan sebagai M_s. garis s disebut sumbu refleksi / sumbu pencerminan.

Untuk menyelidiki lebih lanjut apakah pencerminan suatu transformasi dapat diperlihatkan sebagai berikut.

a. Pencerminan adalah sebuah fungsi.
   Sesuai dengan definisi, jelas daerah asal M adalah seluruh bidang V sehingga pencerminan adalah suatu fungsi dari V ke V.
b. Pencerminan adalah padanan yang surjektif.
   Ambil sebarang $x' \in v$
   Jika $x' \in s \rightarrow x = x'$, karena $Ms(x) = x = x'$
   jika $x' \notin s$ maka berdasarkan sifat geometri, $\forall x | s$ merupakan sumbu ruas xx' (karena V adalah bidang euclides).
   Artinya setiap x' memiliki prapeta

Jadi M adalah surjektif

c. Pencerminan adalah padanan yang injektif.

Andaikan A ≠ B

Jika A∈s dan B∈s maka Ms(A) = A' = A dan Ms(B) = B' = B

Jadi A' ≠ B'

Kalau salah satu, misalnya A∈s, maka Ms(A) = A' = A

Karena B∉s, B'= M_s dengan B'∉s maka A' ≠ B' atau Ms(A) ≠ Ms(B)

Andaikan A∉s dan B∉s

Andaikan bahwa Ms(A) = Ms(B) atau A' = B'

Jadi A'A ⊥ s dan B'B ⊥ s

Ini berarti dari satu titik A' ada 2 garis berlainan yang tegak lurus pada s dan ini tidak mungkin. Jadi pengandaian bahwa kalau A ≠ B maka Ms(A) = Ms(B) adalah tidak benar sehingga pengandaian salah

Jadi kalau A ≠ B maka Ms(A) ≠ Ms(B) sehingga M_s injektif

Dengan demikian M_s adalah suatu transformasi dengan daerah asal V dan daerah nilai V

Teorema 2.1

Setiap refleksi pada garis adalah suatu transformasi.

Bukti:

M_s: V → V

a. Akan dibuktikan Ms surjektif.

Ambil Sebarang $X' \in V \ni X' = Ms(X)$.

Menurut definisi jika $X \in S$ maka $Ms(X) = X' = X$

Jadi $\forall X' \in V, \exists X' = X = Ms(X), X \in S$

$\forall X' \in V, \exists X' = X = Ms(X)$ dengan S sumbu XX'

Jadi M_s surjektif.

b. Akan dibuktikan M_s injektif.

Kasus 1

Misalkan $A_1 \neq A_2$

Untuk $A_1 \in S$ maka $Ms(A_1) = A_1' = A_1$.

$A_2 \in S$ maka $Ms(A_2) = A_2' = A_2$

Jadi $A_1' \neq A_2'$

Kasus 2

Ambil $A_1 \in S, A_2 \notin S$ maka

i). $Ms(A_1) = A_1' = A_1$

ii). $A_2 = Ms(A_2) = A_2'$, yakni S sumbu dari $\overline{A_2A_2'}$.

Karena $A_1 \in S$ dan $A_2 \notin S$ maka $A_1' \neq A_2'$

Kasus 3

Untuk $A_1 \notin S, A_2 \notin S, A_1 \neq A_2 \Rightarrow A_1' \neq A_2'$

Andaikan $Ms(A_1) = Ms(A_2)$. Maka dipenuhi :

A_1A_1' adalah suatu garis dengan sumbu S, artinya $A_1A_1' \perp S$.

A_2A_2' adalah suatu garis dengan sumbu S, artinya $A_2A_2' \perp S$.

Andaikan $A_1 = A_2$, maka menurut teorema tidak ada 2 buah garis yang tegak lurus terhadap garis sumbu S yang melalui titik yang sama.

Artinya jika $Ms(A_1) = Ms(A_2)$ maka haruslah $A_1 = A_2$. Padahal diketahui $A_1 \neq A_2$.

Jadi haruslah $A_1 \neq A_2 \Rightarrow Ms(A_1) \neq Ms(A_2)$.

Karena Ms surjektif dan injektif maka berlaku bahwa setiap refleksi pada garis adalah suatu transformasi.

Contoh 1

Apabila pada V ada sistem sumbu ortogonal dan A (1,3) sedangkan B (-2,-1). Tentukan persamaan sebuah garis g sehingga Mg(A) = B

Jawab :

Persamaan garis AB

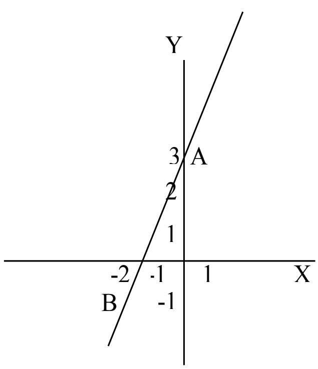
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y-3}{-1-3} = \frac{x-1}{-2-1}$$

$$\Leftrightarrow -3(y-3) = -4(x-1)$$

$$\Leftrightarrow -3y + 9 = -4x + 4$$

$$\Leftrightarrow 4x - 3y + 5 = 0$$



Gradien m = $\frac{4}{3}$

Gradien yang tegak lurus garis AB, $m_2 = -\frac{3}{4}$

Titik tengah AB = $\frac{(1,3)+(-2,-1)}{2} = \frac{(-1,2)}{2} = (-\frac{1}{2},1)$

Persamaan garis yang melalui $(-\frac{1}{2},1)$ dengan m = 3 adalah

$y - y_1 = m\ (x - x_1)$

$y - 1 = -\ \frac{3}{4}(x + \frac{1}{2})$

$y = -\ \frac{3}{4}x - \frac{3}{8} + 1$

$y = -\ \frac{3}{4}x + \frac{5}{8}$

$8y + 6x - 5 = 0$

$6x - 8y - 5 = 0$

Jadi persamaan garis g adalah 6x - 8y – 5 = 0

Contoh 2

Diketahui: g = $\{(x,y) |\ x = -3\}$

Ditanya:

a. Mg(A), bila A(2,1).

b. Bila Mg(C) = (-1,7), maka C = . . .

c. P(x,y), maka Mg(P) = . . .

Jawab:

a. Persamaan garis yang melalui A(2,1) dan tegak lurus g adalah y = 1.

B (-3,1) adalah titik tengah $\overline{AA'}$,

Maka (-3,1) = $\left(\frac{x_A + x_{A'}}{2}, \frac{y_A + y_{A'}}{2}\right) = \left(\frac{2 + x_A}{2}, \frac{1 + y_{A'}}{2}\right)$

Jelas $(-6,2) = (2 + x_{A'}, 2 + y_{A'})$

$(x_{A'}, y_{A'}) = (-8,1)$

Jadi A’ = (-8,1)

b. Persamaan garis yang melalui Mg(C) = (-1,7) dan tegak lurus g adalah y = 7.

D(-3,7) adalah titik tengah $\overline{AA'}$,

Maka (-3,7) = $\left(\frac{x_C + x_{C'}}{2}, \frac{y_C + y_{C'}}{2}\right) = \left(\frac{x_C - 1}{2}, \frac{y_C + 7}{2}\right)$

Jelas $\left(-6{,}14\right)=(x_C-1, y_C+7)$

$\left(x_C, y_C\right)=\left(-5{,}7\right)$

Jadi C = (-5,7)

c. Persamaan garis yang melalui P(x,y) dan tegak lurus g adalah y = y_p.

Misal Q = (xQ,yQ) adalah titik tengah $\overline{PP'}$.

Jelas Q = (-3, y_p) = $\left(\frac{x_p+x_{p'}}{2}, \frac{y_p+y_{p'}}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \left(-6{,}2y_p\right)=(x_p+x_{p'}, y_p+y_{p'})$

$\Leftrightarrow \left(x_p, y_{p'}\right)=\left(-6-x_p, y_p\right)$

Jadi apabila P (x,y) maka Mg(P) = P' = (-6 – x,y).

E. Tugas Kelompok

Diketahui g = $\{(x, y) | \mathrm{y}=2\}$

Ditanya:

a. Jika A = $\left(3, \sqrt{2}\right)$, tentukan A' = Mg(A).

b. Jika D' = (2,-4), tentukan prapeta D' oleh Mg.

c. Jika P(x,y). Tentukan Mg(P)

F. Tes Formatif

1. Diketahui dua titik A dan B. Lukislah garis g sehingga Mg(A) = B. Tentukan pula Mg(B).
2. Diketahui h = $\{(x, y) | \mathrm{y}=\mathrm{x}\}$

   Ditanya:

   a. Jika A = (2,-3), tentukan A' = M_h(A).

   b. Jika D' = (2,-4), tentukan prapeta dari B' oleh M_h.

   c. Jika P(x,y). Tentukan M_h(P)
3. Diketahui sebuah garis g. T sebuah fungsi yang didefinisikan untuk setiap titik P pada bidang V sebagai berikut:

   Jika P$\in$g maka T(P) = P

   Jika P$\notin g$ maka T(P) = P' sehingga P' adalah titik tengah ruas garis orthogonal dari P ke g.

   a. Apakah T suatu transformasi?

b. Apabila ada dua titik A dan B sehingga A'B' = AB dengan A' = T(A), B'= T(B), apakah dapat anda katakan tentang A dan B ?

G. Tindak Lanjut

Buatlah catatan individu berkaitan dengan materi yang dipelajari dalam bab ini menggunakan bahasa sendiri

H. Daftar Pustaka

Eccles, Frank M. 1971. *An Introduction to Transformational Geometry Addison*. Wesley Publishing Company, Reading Massachusets.

Herstein, I.N. 1975. *Topics in Algebra*. New York: John Wiley & Sons.

Martin, George E. 1982. *Transformation Geometry*. New York: Springer-Verlag.

______________. 1975. The *Foundations of Geometry and The Non-Euclidean Plane*. New York: Springer-Verlag.

Rawuh. 1994. *Geometri Transformasi*. Semarang: Universitas Negeri Semarang

Susanta, B. 1990. *Geometri Transformasi*. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.

Yaglom, I.M. 1962. *Geometric Transformations I*. New York: Random House.

BAB III
ISOMETRI

A. Sub – CPMK

Mahasiswa mampu memahami isometri

B. Gambaran Umum Materi

Pada bab ini mahasiswa akan belajar tentang materi isometri yaitu transformasi yang mengawetkan suatu jarak atas pencerminan (refleksi), pergeseran (translasi) dan perputaran (*rotasi).*

C. Relevansi Terhadap Pengetahuan Mahasiswa dan Bidang Kerja

Dengan mempelajari materi isometri, mahasiswa akan memahami konsep materi isometri sehingga dapat digunakan sebagai bekal mahasiswa saat mempelajari materi berikutnya yang berkaitan dengan isometri beserta aplikasinya.

D. Sub Bab

1. Pengertian Isometri

Suatu pencerminan atau refleksi pada sebuah garis g adalah suatu transformasi yang mengawetkan jarak atau juga dinamakan suatu isometri.

Definisi 3.1

Suatu transformasi T adalah suatu isometri jika untuk setiap pasang titik P, Q berlaku P'Q' = PQ dengan P' = T(P) dan Q' = T(Q).

Teorema 3.1

Setiap refleksi pada garis adalah suatu isometri.

Jadi kalau A' = Ms(A), B = Ms(B) maka AB = A'B'.

Bukti:

Ambil Sebarang A, B, A', B' $\in$ V dengan Ms(A) = A' dan Ms(B) = B'.

Akan ditunjukkan A'B' = AB.

Kasus I

Jika A, B $\in$ s maka Ms(A) = A' = A dan Ms(B) = B' = B.

Jadi AB = A'B' $\Rightarrow$ Ms(A)Ms(B) = AB.

Kasus II

Jika A $\in$ s, B $\notin$ s dan Ms(A) = A' = A dan Ms (B) = B'

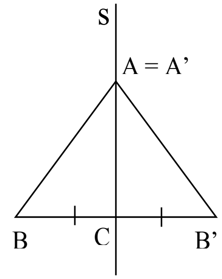
Akan ditunjukkan AB = A'B'

Perhatikan ΔABC & $\Delta AB'C$

AC = AC (berimpit)

$m\angle ACB = m\angle ACB'$ (karena siku-siku)

BC = B'C (karena S sumbu simetri)



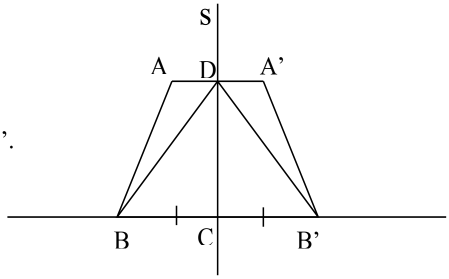
Menurut teorema karena ΔABC & $\Delta AB'C$ mempunyai sifat S Sd S yang sama, maka $\Delta ABC \cong \Delta AB'C$.

Jadi AB = A'B'.

Kasus III

Jika A, B $\notin$ s dan Ms(A) = A', Ms(B) = B'.

Akan ditunjukkan AB = A'B'



Perhatikan ΔBDC & $\Delta B'DC$.

DC = DC (berimpit)

$m\angle DCB = m\angle DCB'$ (karena siku-siku)

BC = B'C (karena s sumbu simetri)

Menurut teorema karena ΔBDC & $\Delta B'DC$ mempunyai sifat S Sd S yang sama maka $\Delta BDC \cong \Delta B'DC$.

Jadi BD = B'D dan $m\angle BDC = m\angle B'DC$.

Karena $m\angle BDC = m\angle B'DC$ dan $m\angle ADC = m\angle A'DC$ (90^0)

$$m\angle ADB = 90^0 - m\angle BDC$$

Maka $m\angle A'DB' = 90^0 - m\angle B'DC$

$$m\angle ADB = m\angle A'DB'$$

Perhatikan ΔBAD & $\Delta B'A'D$

AD = A'D (diketahui)

$m\angle ADB = m\angle A'DB'$ (dari pernyataan)

DB = DB' (diketahui)

Menurut teorema karena ΔBAD & $\Delta B'A'D$ mempunyai sifat S Sd S yang sama maka $\Delta BAD \cong \Delta B'A'D$.

Jadi AB = A'B'.

Definisi 3.2

Suatu transformasi disebut suatu kolineasi jika hasil transformasi sebuah garis lurus akan berupa garis lurus lagi.

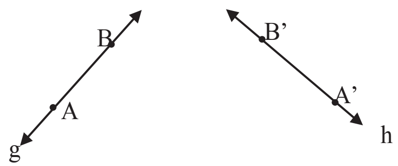
Teorema 3.2

Sebuah isometri bersifat :

a. Memetakan garis menjadi garis
b. Mengawetkan besarnya sudut antara dua garis
c. Mengawetkan kesejajaran dua garis

Bukti :

a. Andaikan g sebuah garis dan T suatu isometri maka akan dibuktikan bahwa T(g) = g' adalah suatu garis juga.



Bukti:

Ambil sembarang $A \in g$, $B \in g$. T(A) = A', T(B) = B' dan T(g) = g'.

Tarik garis melalui A', B' terbentuk sebuah garis h.

Akan dibuktikan bahwa h = g', artinya $h \subset g'$ dan $g' \subset h$.

(i) Bukti $g' \subset h$

Ambil $Y' \in g'$, T transformasi maka $\exists\, Y \in g \ni T(Y) = Y'$.

Dimisalkan AYB = AY + YB = AB

T isometri maka AY = A'Y', YB = Y'B', AB = A'B'

AB = AY+YB = A'Y'+Y'B' = A'B' artinya A',Y',B' segaris.

Karena $A' \in h$ dan $B' \in h$ maka $Y' \in h$

$\therefore \forall Y' \in g'$ maka $Y' \in h$

berarti $g' \subset h$

(ii) Bukti $h \subset h'$

Ambil sembarang $X' \in h \ni A'X'B' = A'X' + X'B'$

Karena T transformasi dan T surjektif, artinya $\exists\, X \in V \ni T(X) = X'$

T isometri maka A'B' = AB

A'X' = AX

$X'B' = XB$

$A'B' = A'X' + X'B' = AX + XB = AB$. Ini berarti A, X, B segaris sehingga

$X \in g$ maka $T(X) = X' \in T(g) \Rightarrow X' \in g'$

$\forall X' \in h$

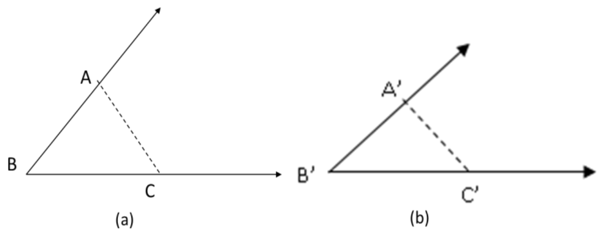
$X' \in g'$

Maka $h \subset g'$

Dari (i) dan (ii) disimpulkan bahwa $h = g'$, artinya g adalah garis maka $T(g) = g'$ suatu garis.

b. Ambil sebuah $\angle ABC$.

Akan ditunjukkan $m(\angle ABC) = m(\angle A'B'C')$



Andaikan $A'=T(A)$, $B'=T(B)$ dan $C'=T(C)$

Menurut teorema sebelumnya,maka A'B' dan B'C' adalah garis lurus

Oleh karena $\angle$ ABC dibentuk oleh BA dan BC, maka $\angle$ A'B'C' juga dibentuk oleh oleh B'A' dan B'C'.

Sedangkan *(garis) A'B' =AB, B'C'= BC dan A'C'= AC* Sehingga $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

Jadi $\angle ABC = \angle A'B'C'$

Berarti suatu isometri mempertahankan besarnya sudut.

c.

$a // b$, $a' = T(a)$, $b' = T(b)$, maka harus dibuktikan $a' // b'$

andaikan a' tidak sejajar b' berarti a' dan b' berpotongan.

Ambil $P' \in a'$ dan $P' \in b'$

T transformasi,maka ada P sehingga T(P) = P', dengan P $\in$ a dan P $\in$ b ini berarti a dan b berpotongan di P. Hal ini bertentangan dengan yang di ketahui bahwa a//b. Maka pengandaian salah, Berarti seharusnya a'//b'.

Akibat : salah satu akibat dari sifat (b) Teorema 3.2 ialah bahwa apabila a $\perp$ b maka T(a) $\perp$ T(b) dengan T sebuah isometri.

Bukti:

Dipunyai a $\perp$ b akan ditunjukkan T(a) $\perp$ T(b)

Andaikan T(a) tidak tegak lurus T(b) maka terapat sudut antara T(a) dengan T(b) yang tidak sama dengan 90^o. Karena isometri mengawetkan besarnya sudut antara dua garis maka sudut yang dibentuk oleh a dan b tidak sama dengan 90^o. Hal ini kontradiksi dengan a $\perp$ b. Jadi pengandaian harus dibatalkan.

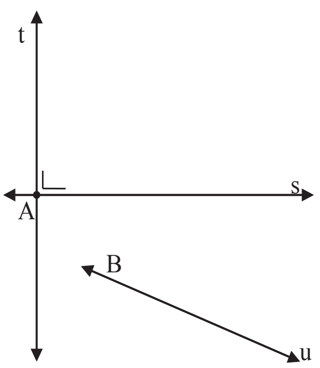
Artinya T(a) $\perp$ T(b).

Jadi apabila a $\perp$ b maka T(a) $\perp$ T(b) dengan T sebuah isometri.

Contoh 1

Diketahui garis-garis s, t, u dan titik A,B seperti dapat dilihat pada gambar dibawah ini. T adalah sebuah isometric dengan B = T(A) dan u = T(s). kalau t $\perp$ s, lukislah t'= T(t).

Jawab:



T(t) = t' , A $\in$ t.

Karena B = T(A) maka B $\in$ t'.

Karena t $\perp$ s dan T isometri, maka

T(t)$\perp$ T(s) $\leftrightarrow$ t'$\perp$ u.

Jadi, untuk melukis t' buat garis t' melalui B yang tegak lurus u.

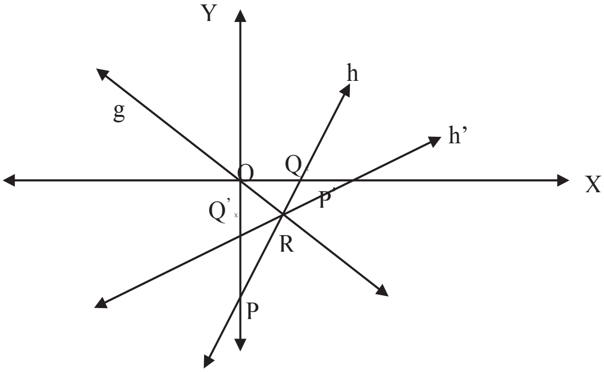
Contoh 2

Diketahui garis g $\equiv$ { (x,y) | y = -x } dan garis h $\equiv$ { (x,y) | y = 2x – 3}.

Apabila M_g adalah refleksi pada garis g tentukanlah persamaan garis $h' = M_g(h)$.

Jawab :

Oleh karena M_g sebuah refleksi pada g jadi suatu isometri, maka menurut teorema 3.2, h' adalah sebuah garis.



Garis h' akan melalui titik potong antara h dan g misalnya R, sebab $M_g(R) = R$.

g : y = -x, h : y = 2x – 3, misalkan R(x,y). Dengan mensubsitusikan g ke dalam h diperoleh:

$$y = 2x - 3$$
$$\Leftrightarrow -x = 2x - 3$$
$$\Leftrightarrow -3x = -3$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

Karena y = -x, jadi y = -x. Jelas bahwa R = (1,-1); h' akan pula melalui Q' = (0,-3/2).

Persamaan garis h' adalah

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow \frac{y - (-1)}{\frac{3}{2} - (-1)} = \frac{x - 1}{0 - 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y + 1}{-\frac{1}{2}} = \frac{x - 1}{-1}$$

$$\Leftrightarrow y + 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow y - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

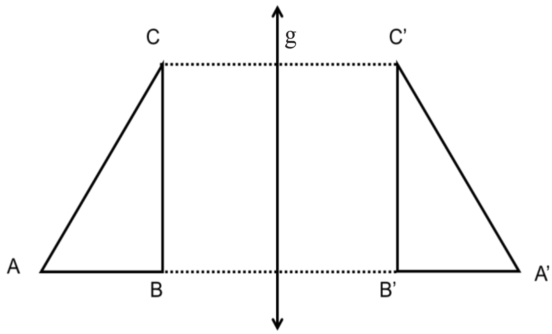
$$\Leftrightarrow 2y - x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0$$

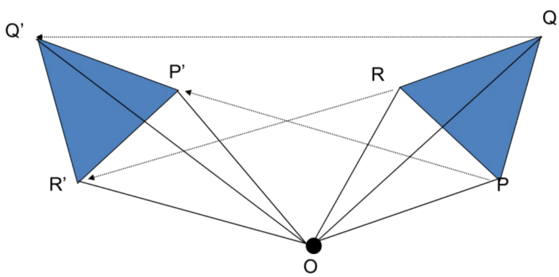
Dengan demikian persamaan h' adalah : h' = { (x,y) | x-2y-3 = 0 }

2. Isometri langsung dan isometri lawan

Perhatikan gambar 3.a ini. Anda melihat suatu transformasi T yang memetakan segitiga ABC pada segitiga A' B' C' misalnya sebuah pencerminan pada garis g.



Gambar 3.a



Gambar 3.b

Tampak bahwa apabila pada segitiga ABC, urutan keliling adalah A→ B → C adalah berlawanan dengan putaran jarum jam maka pada petanya, yaitu segitiga A' B' C', urutan kelilingnya A'→ B'→ C' adalah sesuai dengan putaran jarum jam. Pada gambar 3.b Anda lihat juga suatu isometri, yaitu suatu rotasi (putaran) mengelilingi sebuah titik O. Kelak akan dibicarakan lebih mendalam tentang rotasi ini.

Di sini dikemukakan sekedar sebagai contoh. Kalau pada segitiga PQR urutan keliling P→ Q → R adalah berlawanan arah maka pada petanya yaitu pada segitiga P' Q' R' urutan keliling P'→ Q'→ R' tetap berlawanan dengan putaran jarum jam.

Untuk membahas lebih lanjut fenomena isometri di atas, kita perkenalkan konsep orientasi tiga titik yang tak segaris. Andaikan (P_1, P_2, P_3) ganda tiga titik yang tak segaris. Maka melalui P_1, P_2, dan P_3 ada tepat satu lingkaran l. kita dapat mengelilingi l berawal misalnya dari P_1 kemudian sampai P_2, P_3 dan akhirnya kembali ke P_1.

Apabila arah keliling ini sesuai dengan putaran jarum jam, maka dikatakan bahwa ganda tiga titik (P_1, P_2, P_3) memiliki orientasi yang sesuai dengan putaran jarum jam (atau orientasi yang negatif). Apabila arah keliling itu berlawanan dengan arah putaran jarum jam, maka dikatakan bahwa ganda tiga titik (P_1, P_2, P_3) memiliki orientasi yang berlawanan dengan putaran jarum jam (atau orientasi yang positif). Jadi pada gambar 3.a, (A,B,C) memiliki orientasi positif sedangkan (A' B' C') memiliki orientasi yang negatif. Pada gambar 3.b, orientasi (PQR) adalah positif dan orientasi (P' Q' R') tetap positif.

Jadi pencerminan pada gambar 2.a mengubah orientasi sedangkan putaran pada gambar 3.b mengawetkan orientasi.

Definisi 3.3

a. Suatu transformasi T mengawetkan suatu orientasi apabila untuk setiap tiga titik tak segaris (P_1, P_2, P_3) orientasinya sama dengan ganda (P_1', P_2', P_3') dengan $P_1' = T(P_1)$, $P_2' = T(P_1)$, $P_3' = T(P_3)$.
b. Suatu transformasi T membalik suatu orientasi apabila untuk setiap tiga titik tak segaris (P_1, P_2, P_3) orientasinya tidak sama dengan orientasi peta-petanya (P_1', P_2', P_3') dengan $P_1' = T(P_1)$, $P_2' = T(P_1)$, $P_3' = T(P_3)$.

Definisi 3.4

Suatu transformasi dinamakan langsung apabila transformasi itu mengawetkan orientasi; suatu transformasi dinamakan transformasi lawan apabila transfomasi itu mengubah orientasi.

Teorema 3.3

Setiap refleksi pada garis adalah isometri lawan.

Teorema ini tanpa bukti.

Tidak setiap isometri adalah isometri lawan. Anda dapat melihat pada gambar 2.b. di situ isometri kita (yaitu rotasi pada titik O) adalah sebuah isometri langsung. Oleh karena itu dapat kita kemukakan teorema berikut, tanpa bukti yaitu :

Teorema 3.4

Setiap isometri adalah sebuah isometri langsung atau sebuah isometri lawan.

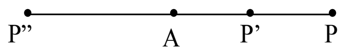
Contoh 3

Diketahui sebuah titik A dan dua transformasi T dan S yang didefinisikan sebagai berikut: T(A) = A, S(A) = A. Jika P $\neq$ A, T(P) = P' dan S(P) = P''. P' adalah titik tengah ruas garis $\overline{AP}$ sedangkan A titik tengah $\overline{PP''}$. Termasuk golongan manakah masing-masing trnsformasi S dan T itu?

Jawab:

T(A) = A, S(A), jika P $\neq$ A $\Rightarrow$ T(P) = P',S(P) = P"

Ilustrasi:



Dari gambar diperoleh S isometri berlawanan karena $\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{P''A}$

Dan T isometri langsung karena $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{P'A}$

E. Tugas Kelompok

Diketahui garis g = {(x,y) |x + 2y = 1} dan h = {(x,y) |x = -1}. Tulislah sebuah persamaan garis g' = M_h(g).

F. Tes Formatif

1. Diketahui garis-garis g = {(x,y) | y = 0}, h = {(x,y) |y = x}, dan k = {(x,y) |x = 2}. Tulislahpersaman garis-garis berikut;

   a). M_g(h) b). M_h(g)

   c). M_g(k) d). M_h(k)

2. Diketahui garis-garis g dan h dan titik-titik P dan R. P'=M_g(P), P"=M_h(P'), R'=M_g(R), dan R"=M_h(R).
   a. Lukislah P' dan R"
   b. Bandingkan jarak PR dan P"R"

3. Diketahui bahwa T dan S adalah padanan- padanan sehingga untuk semua titik P berlaku T(P) = P' dan S(P') = P''. W adalah sebuah fungsi yang didefinisikan untuk semua P sebagai W(P) = P''. Apakah W suatu transformasi?

G. Tindak Lanjut

Buatlah catatan individu berkaitan dengan materi yang dipelajari dalam bab ini menggunakan bahasa sendiri

H. Daftar Pustaka

Eccles, Frank M. 1971. *An Introduction to Transformational Geometry Addison*. Wesley Publishing Company, Reading Massachusets.

Herstein, I.N. 1975. *Topics in Algebra*. New York: John Wiley & Sons.

Martin, George E. 1982. *Transformation Geometry*. New York: Springer-Verlag.

______________. 1975. The *Foundations of Geometry and The Non-Euclidean Plane*. New York: Springer-Verlag.

Rawuh. 1994. *Geometri Transformasi*. Semarang: Universitas Negeri Semarang

Susanta, B. 1990. *Geometri Transformasi*. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.

Yaglom, I.M. 1962. *Geometric Transformations I*. New York: Random House.

BAB IV
HASIL KALI TRANSFORMASI

A. Sub – CPMK

Mahasiswa mampu memahami hasilkali transformasi

B. Gambaran Umum Materi

Pada bab ini mahasiswa akan belajar tentang materi hasilkali transformasi yang merupakan perkalian dua atau beberapa transformasi beserta sifat-sifatnya.

C. Relevansi Terhadap Pengetahuan Mahasiswa dan Bidang Kerja

Dengan mempelajari materi hasilkali transformasi, mahasiswa akan memahami konsep materi hasilkali transformasi sehingga dapat digunakan sebagai bekal mahasiswa saat mempelajari materi berikutnya yang berkaitan dengan hasilkali transformasi beserta aplikasinya.

D. Sub Bab

Definisi 4.1

Andaikan F dan G dua transformasi, dengan

$F : V \to V$

$G : V \to V$

Maka komposisi dari F dan G yang ditulis sebagai $G \circ F$ didefinisikan sebagai:

$(G \circ F)(P) = G[F(P)],\ \forall P \in V$

Teorema 4.1

Jika $F : V \to V$ dan $G : V \to V$ masing-masing suatu transformasi maka hasil kali $H = G \circ F : V \to V$ adalah juga suatu transformasi.

Bukti :

Akan dibuktikan $H = G \circ F$ suatu transformasi.

Untuk ini harus dibuktikan dua hal yaitu H surjektif dan H injektif.

a. Akan dibuktikan H surjektif.

   Karena F transformasi maka daerah nilai F adalah seluruh bidang V, dan daerah asal G juga seluruh V sebab G suatu transformasi.

   Ambil $y \in V$, apakah ada x sehingga $H(x) = y$? Akan dibuktikan $y = H(x)$.

   Karena G transformasi maka $\forall y \in V \exists z \in V \ni y = G(z)$.

   Karena F suatu transformasi maka pada $z \exists x \in V \ni z = F(x)$.

Maka $y = G[F(x)]$ atau $y = G \circ F(x)$.

Jadi $y = H(x)$.

Jadi H surjektif.

b. Akan dibuktikan H injektif.

Artinya, Jika $P \neq Q$ maka $H(P) \neq H(Q)$ $\forall$ $P, Q \in V$.

Ambil $P, Q \in V$ dan $P \neq Q$. Karena F injektif maka $F(P) \neq F(Q)$.

Jelas $G(F(P)) \neq G(F(Q))$ karena G injektif.

Diperoleh, Jika $P \neq Q$ maka $G(F(P)) \neq G(F(Q))$ $\forall$ $P, Q \in V$.

Jadi H injektif.

Karena H surjektif dan H injektif maka H suatu transformasi.

Jadi $H = G \circ F$ suatu transformasi.

Catatan : Dengan jalan yang serupa dapat pula dibuktikan bahwa hasil kali $F \circ G$ juga suatu transformasi.

Sifat-sifat Komposisi Transformasi

1. Sifat tertutup dan sifat asosiatif
   a. Operasi komposisi bersifat tertutup
   b. Jika P, Q, R adalah transformasi-transformasi, maka $P \circ (Q \circ R) = (P \circ Q) \circ R$
2. Komposisi dua isometri
   a. Jika P dan Q adalah isometri maka $P \circ Q$ adalah isometri

   Bukti

   Ambil sebarang A, B V

   Q isometri $|Q(A)Q(B)| = |AB|$

   P isometri $|P[Q(A)]P[Q(B)]| = |Q(A)Q(B)|$

   $|PQ(A)PQ(B)| = |AB|$

   Jadi PQ isometri

   b. Jika S1 dan S2 adalah isometri langsung sedang T1 dan T2 adalah isometri lawan maka:

   1) S1 o S2 adalah isometri langsung

   2) S1 o T1 adalah isometri lawan

   3) T1 o S1 adalah isometri lawan

   4) T1 o T2 adalah isometri langsung

Contoh 1

Diketahui : garis-garis *g* dan *h* dan titik-titik P

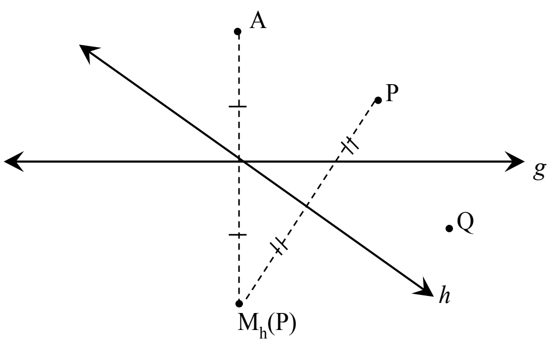
Lukislah :

a. $A = M_g[M_h(P)]$

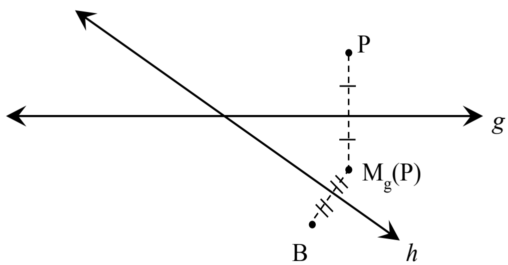
b. $B = M_h[M_g(P)]$

Jawab :

a. $A = M_g[M_h(P)]$



b. $B = M_h[M_g(P)]$



Contoh 2

Diketahui T_1, T_2, T_3 suatu transformasi.

Tentukan hasilkali transformasinya

Jawab :

Andaikan $P' = T_1(P)$; $P'' = T_2(P')$; $P''' = T_3(P'')$

$$
\begin{aligned}
\text{Maka } [T_3(T_2T_1)](P) &= T_3[T_2T_1(P)] \\
&= T_3[T_2\{T_1(P)\}] \\
&= T_3[T_2(P')] \\
&= T_3(P'') \\
&= P'''
\end{aligned}
$$

Kita juga dapat mengalikan sebagai berikut

$[(T_3T_2)T_1)](P) = (T_3T_2)[T_1(P)]$

$= (T_3T_2)(P')$

$= T_3[T_2(P')]$

$= T_3(P'')$

$= P'''$

Jadi $T_3(T_2T_1) = (T_3T_2)T_1 = T_3T_2T_1$ sehingga hasilkali transformasi bersifat asosiatif

E. Tugas Kelompok

Diketahui : dua garis g dan h yang berbeda berpotongan di P

Buktikan : $M_g[M_h(A)] = P$ jika dan hanya jika A = P

F. Tes Formatif

1. Diketahui : T dan S isometri

   Selidiki :

   a. TS sebuah isometri
   b. TS = ST
   c. Jika g sebuah garis maka $g' = (TS)(g)$ juga sebuah garis.
   d. Jika g // h dan $g' = (TS)(g)$, $h' = (TS)(h)$ maka g' // h'

2. Diketahui : garis-garis g, h, k dengan g // k

   Lukislah :

   a. $g' = M_h[M_g(g)]$
   b. $g' = M_g[M_h(g)]$
   c. $k' = M_g[M_h(k)]$

3. Diketahui : garis g adalah sumbu X sebuah sumbu ortogonal dan $h = \{(x, y) | y = x\}$.

   Ditanyakan :

   a. Persamaan garis $M_h[M_g(g)]$
   b. $P'' = M_h[M_g(P)]$ dengan P = (0,3)
   c. $Q'' = M_g[M_h(Q)]$ dengan Q = (3,-1)
   d. $R'' = M_g[M_h(R)]$ dengan R = (x, y)
   e. Besarnya $\angle ROR''$ apabila O titik asal

G. Tindak Lanjut

Buatlah catatan individu berkaitan dengan materi yang dipelajari dalam bab ini menggunakan bahasa sendiri

H. Daftar Pustaka

Eccles, Frank M. 1971. *An Introduction to Transformational Geometry Addison*. Wesley Publishing Company, Reading Massachusets.

Herstein, I.N. 1975. *Topics in Algebra*. New York: John Wiley & Sons.

Martin, George E. 1982. *Transformation Geometry*. New York: Springer-Verlag.

______________. 1975. The *Foundations of Geometry and The Non-Euclidean Plane*. New York: Springer-Verlag.

Rawuh. 1994. *Geometri Transformasi*. Semarang: Universitas Negeri Semarang

Susanta, B. 1990. *Geometri Transformasi*. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.

Yaglom, I.M. 1962. *Geometric Transformations I*. New York: Random House.

BAB V

TRANSFORMASI BALIKAN

A. Sub – CPMK

Mahasiswa mampu memahami transformasi balikan

B. Gambaran Umum Materi

Pada bab ini mahasiswa akan belajar tentang materi transformasi balikan yang merupakan balikan dari suatu transformasi.

C. Relevansi Terhadap Pengetahuan Mahasiswa dan Bidang Kerja

Dengan mempelajari materi transformasi balikan, mahasiswa akan memahami konsep materi transformasi balikan sehingga dapat digunakan sebagai bekal mahasiswa saat mempelajari materi berikutnya yang berkaitan dengan hasilkali transformasi beserta aplikasinya.

D. Sub Bab

Suatu transformasi pada suatu bidang V adalah suatu fungsi yang bijektif dengan daerah asal V dan daerah hasilnya juga V. Jika g sebuah garis dan M_g refleksi pada garis g, maka $M_g M_g(P) = P$. Kita tulis juga $M^2{}_g(P) = P$. Jadi M^2 adalah suatu transformasi yang memetakan setiap titik pada dirinya. Transformasi yang demikian dinamakan transformasi Identitas, dilambangkan dengan huruf I. Jadi $I(P) = P, \forall P$.

Apakah I memang benar suatu transformasi? Untuk mengetahuinya kita lihat pembuktian seperti berikut.

a. Apakah I injektif?

Untuk menunjukkan I injektif ditunjukkan $\forall x_1, x_2 \in V, x_1 \neq x_2 \Rightarrow I(x_1) \neq I(x_2)$.

Bukti:

Ambil $x_1, x_2 \in V$ dengan $x_1 \neq x_2$.

Menurut definisi identitas, $x_1 \in V \Rightarrow I(x_1) = x_1$

$$x_2 \in V \Rightarrow I(x_2) = x_2$$

Karena $x_1 \neq x_2$ maka $I(x_1) \neq I(x_2)$

Jadi, I injektif.

b. Apakah I surjektif?

Untuk menunjukkan I surjektif, ditunjukkan $\exists y' \in V \ni I(y) = y'$

Bukti:

Akan dibuktikan $\exists y' \in V \ni I(y) = y'$

Ambil $y' \in V$, menurut definisi identitas jika $y \in V$ maka $I(y) = y' = y$

Sehingga $\forall y' \in V \exists y \in V \ni y' = I(y) = y$. Jadi $y' = y$.

Jadi, I surjektif.

Benar bahwa I suatu transformasi.

Karena I transformasi, T trasnformasi, berlaku sifat berikut:

$TI(P) = IT(P) = I[T(p)] = T(P), \forall P$

Jadi $TI = T$

$IT(P) = I[T(P)] = T(P), \forall P$

Jadi $IT = T$, sehingga $TI = IT = T$

Dengan demikian, transformasi identitas I berperan sebagai bilangan I dalam himpunan transformasi-transformasi dengan operasi perkalian antara transformasi-transformasi.

Dalam himpunan bilangan-bilangan real dengan operasi perkalian pada setiap $x \neq 0$ ada balikan x^{-1} sehingga $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$. Demikian juga dalam transformasi, jika terdapat dua transformasi misal T dan Q, yang hasil kalinya adalah I (transformasi identitas) ditulis $TQ = QT = I$. Transformasi balikan dari T ditulis sebagai T^{-1} sehingga $TT^{-1} = T^{-1}T = I$.

Teorema 5.1

Setiap transformasi T memiliki balikan.

Bukti:

Jadi ada prapeta A∈V sehingga T(A) = X. Kita tentukan L(X) = A, artinya L(X) adalah prapeta dari X.

Dari T(A) = X → T [L(X)] = X

TL(X) = X, ∀ X∈V → TL = I

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa LT = I

Andaikan T(Y) = B → (LT)(Y) = L [T(Y)]

(LT)(Y) = L (B)

(LT)(Y) = Y, ∀ Y∈V → LT = I

Sehingga TL = LT = I

Sekarang akan dibuktikan bahwa L adalah suatu transformasi.

Dari definisi L jelas L suatu padanan yang surjektif. Andaikan $L(X_1) = L(X_2)$ dan andaikan $T(A_1) = X_1$, $T(A_2) = X_2$, $T(X_1) = A_1$, $T(X_2) = A_2$.

T transformasi dan karena $A_1 = A_2 \rightarrow X_1 = X_2$. Jadi dari $L(X_1) = L(X_2) = X_1 = X_2$ sehingga L injektif. Dengan demikian terbukti L suatu transformasi. Transformasi L ini disebut balikan transformasi T dan dilambangkan $L = T^{-1}$.

Contoh 1

Pada suatu sistem sumbu ortogonal XOY didefinisikan transformasi F dan G sebagai berikut:

$\forall P(x.y), F(P) = \left(x + 2, \frac{1}{2} y \right)$ dan $G(P) = (x - 2, 2y)$

Sehingga $(FG)(P) = F[G(P)] = F[(x-2,2y)] = (x, y) = P$

Dan $(GF)(P) = G[F(P)] = G\left[(x + 2, \frac{1}{2} y) \right] = (x, y) = P$

Jadi $(FG)(P) = (GF)(P) = P = I(P), \forall P$

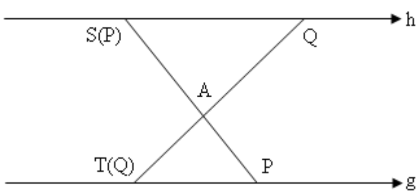
Atau $FG = GF = I$

Jadi *F* dan *G* balikan satu sama lain. Kita tulis $G = F^{-1}$

Contoh 2

Diketahui dua buah garis g dan h yang sejajar. Padanan S dan T ditentukan sebagai berikut :

$S(P) = \overleftrightarrow{PA} \cap h, \forall P \in g$ dan $T(Q) = \overleftrightarrow{QA} \cap g, \forall Q \in h$



Jadi daerah asal S adalah g dan daerah asal T adalah garis h, sedangkan daerah nilai S adalah h dan daerah nilai T adalah g

Untuk $P \in g$, maka $(TS)(P) = TS(P) = P \rightarrow TS = I$

Untuk $Q \in g$, maka $(ST)(Q) = ST(Q) = Q \rightarrow ST = I$

Sehingga TS = ST = I

Ini berarti T balikan dari S dan S balikan dari T atau T = S^{-1} dan S = T^{-1}

Teorema 5.2

Setiap transformasi hanya memiliki satu balikan.

Bukti:

Andaikan T suatu transformasi dengan dua balikan S_1 dan S_2.

Karena S_1 balikan dari T, maka $(TS_1)(P) = (S_1T)(P) = I(P), \forall P$

dan karena S_2 balikan dari T, maka $(TS_2)(P) = (S_2T)(P) = I(P), \forall P$

Sehingga $(TS_1)(P) = (TS_2)(P)$

$\Leftrightarrow T[S_1(P)] = T[S_2(P)]$

Karena T transformasi maka $S_1(P) = S_2(P), \forall P.$

Sehingga $S_1 = S_2$. Jadi balikan T adalah $S_1 = S_2 = S$.

Dengan kata lain transformasi T hanya memiliki satu balikan.

Teorema 5.3

Balikan setiap pencerminan pada garis adalah pencerminan itu sendiri

Bukti:

Andaikan pencerminan pada garis g adalah M_g.

Andaikan $M_g(X) = Y, X \notin g$ maka $M_g\lfloor M_g(X)\rfloor = X$ atau $(M_gM_g)(X) = I(X), \forall X \notin g.$

jadi $M_g \circ M_g = I$.

Jika $X \in g$ maka $M_g(X) = X$ sehingga $M_g(X) = M_g\lfloor M_g(X)\rfloor$ atau $M_g \circ M_g = I$

Jadi untuk setiap X diperoleh $M_g \circ M_g = I$.

Jadi $M^{-1}{}_g = M_g$.

Definisi 5.1

Suatu transformasi yang balikannya adalah transformasi itu sendiri dinamakan suatu *involusi*.

Andaikan *T* dan *S* transformasi maka masing-masing memiliki balikan, yaitu T^{-1} dan S^{-1}. Komposisi transformasi, yaitu $T \circ S$ juga suatu transformasi. Jadi ada balikan $(T \circ S)^{-1}$

Teorema 5.4

Apabila T dan S transformasi-transformasi, maka $(T \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ T^{-1}$.

Bukti:

Diketahui $(T \circ S)^{-1} \circ (T \circ S) = I$.

Tetapi $(S^{-1} \circ T^{-1}) \circ (T \circ S) = S^{-1} \circ (T^{-1} \circ T) \circ S = S^{-1} \circ I \circ S = S^{-1} \circ S = I$.

Oleh karena suatu transformasi hanya memiliki satu balikan, maka $(T \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ T^{-1}$.

Jadi balikan hasil kali transformasi adalah hasil kali balikan – balikan transformasi dengan urutan yang terbalik.

Contoh 3

Pada sebuah sistem sumbu ortogonal ada garis $g = \{(x, y) | y = x\}$ dan $h = \{(x, y) | y = 0\}$.

Tentukan P sehingga $(M_h M_g)(P) = R$, dengan R = (2,7).

Jawab :

Andaikan $P = (x, y)$.

Kita peroleh berturut-turut $(M^{-1}{}_g M^{-1}{}_h)(M_h M_g)(P) = (M^{-1}{}_g M^{-1}{}_h)(R)$,

Jadi $P = M^{-1}{}_g [M^{-1}{}_h (R)]$

Oleh karena $R = (2,7)$ dan $M^{-1}{}_h = M_h$, maka $M^{-1}{}_h (R) = M_h (R) = (2,-7)$ sehingga $M^{-1}{}_g M^{-1}{}_h (R) = M^{-1}{}_g (2,-7) = M_g (2,-7) = (-7,2)$ sehingga $P = (-7,2)$.

E. Tugas Kelompok

Apabila $g = \{(x, y) | x = 3\}$ tentukanlah:

a. Koordinat-koordinat $W_g (P)$ untuk $P(x, y)$

b. Koordinat-kordinat $W^{-1}{}_g (P)$

c. C dengan $V_h W_g (C) = B$ apabila h sumbu Y dan $B = (-1,6)$

F. Tes Formatif

1. Jika g sebuah garis dan A sebuah titik, tentukan balikan transformasi–transformasi berikut:

   a. W_g b. V_g c. M_g d. U_A

2. Andaikan g sebuah garis,

   a. Apakah W_g sebuah isometri?

   b. Apakah W_g sebuah involusi ?

   c. Apabila A, B dan C segaris (kolinear), apakah yang dapat anda katakan tentang peta-petanya ?

3. Diketahui titik-titik $A(2,3)$, dan $B(-2,9)$.

   a. Tentukan koordinat-koordinat $U_A(B)$

   b. Tentukan koordinat-koordinat $U_A(P)$, dengan $P(x, y)$

   c. Apakah U_A sebuah isometri? Apakah U_A sebuah involusi?

   d. Tentukan koordinat-koordinat $U^{-1}{}_A(P)$

G. Tindak Lanjut

Buatlah catatan individu berkaitan dengan materi yang dipelajari dalam bab ini menggunakan bahasa sendiri

H. Daftar Pustaka

Eccles, Frank M. 1971. *An Introduction to Transformational Geometry Addison*. Wesley Publishing Company, Reading Massachusets.

Herstein, I.N. 1975. *Topics in Algebra*. New York: John Wiley & Sons.

Martin, George E. 1982. *Transformation Geometry*. New York: Springer-Verlag.

______________. 1975. The *Foundations of Geometry and The Non-Euclidean Plane*. New York: Springer-Verlag.

Rawuh. 1994. *Geometri Transformasi*. Semarang: Universitas Negeri Semarang

Susanta, B. 1990. *Geometri Transformasi*. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.

Yaglom, I.M. 1962. *Geometric Transformations I*. New York: Random House.

BAB VI
SETENGAH PUTARAN

A. Sub – CPMK

Mahasiswa mampu memahami setengah putaran

B. Gambaran Umum Materi

Pada bab ini mahasiswa akan belajar tentang materi setengah putaran yang merupakan pencerminan setiap titik bidang pada sebuah titik tertentu.

C. Relevansi Terhadap Pengetahuan Mahasiswa dan Bidang Kerja

Dengan mempelajari materi setengah putaran, mahasiswa akan memahami konsep materi setengah putaran sehingga dapat digunakan sebagai bekal mahasiswa saat mempelajari materi berikutnya yang berkaitan dengan setengah putaran beserta aplikasinya.

D. Sub Bab

1. Pengertian Setengah Putaran

Setengah Putaran mengelilingi sebuah titik adalah suatu involusi. Suatu setengah putaran mencerminkan setiap titik bidang pada sebuah titik tertentu sehingga disebut juga pencerminan pada suatu titik.

Definisi 6.1

Sebuah setengah putaran pada suatu titik A adalah suatu padanan S_A yang didefinisikan untuk setiap titik pada bidang sebagai berikut :

a. Apabila $P \neq A$ maka $S_1(P) = P'$ sehingga A titik tengah ruas garis $\overline{PP'}$.

b. $S_A = A$

Teorema 6.1

Setengah putaran adalah suatu transformasi

Bukti:

Akan dibuktikan S_A Bijektif.

Untuk membuktikan S_A Bijektif maka harus dibuktikan terlebih dahulu S_A Surjektif dan Injektif.

a. Akan dibuktikan S_A Surjektif

Untuk menunjukkan S_A Surjektif, akan ditunjukkan $\exists P' \in V \ni S_A(P) = P'$

Ambil sebarang $P' \in V$

$\mathrm{P}' \in \mathrm{V} \ni \mathrm{P}' = \mathrm{S_A}(\mathrm{P})$

jika $P = A, maka\ S_A(A) = A' = A$

Jadi, $\forall\ P' \in V \ni P' = P = S_A(P)$

Jika $P \neq A$ maka A menjadi sumbu ruas garis $\overline{PP'}$, berarti $S_A(P) = P'$

Jadi, S_A Surjektif

b. Akan dibuktikan S_A Injektif

Misal $B_1 \neq B_2$

Kasus I

$B_1 = B_2 = A$

Untuk $B_1 = A$ maka $S_A(B_1) = B_1 = B_1{}'$………………..1*)

Untuk $B_2 = A$ maka $S_A(B_2) = B_2 = B_2{}'$…………………2*)

Dari 1*) dan 2*) maka diperoleh $S_A(B_1) \neq S_A(B_2)$

Kasus II

$B_1 \neq B_2 \neq A$

Ambil sebarang $B_1, B_2 \in V\ dengan\ B_1 \neq B_2$

$B_1 \neq A, B_2 \neq A, \quad B_2, B_2, A\ tidak\ segaris$

Sehingga $S_A(B_1) = B_1'$ dan $S_A(B_2) = B_2{}'$

Andaikan $S_A(B_1) = S_A(B_2)$

Karena $S_A(B_1) = S_A(B_2)$

Maka $\mathrm{B}_1' = \mathrm{S_A}(\mathrm{B}_1) = \mathrm{S_A}(\mathrm{B}_2) = \mathrm{B}_2{}'$

Sehingga diperoleh $B_1' = B_2{}'$ dan $B_1 = B_2$

Menurut teorama, “Melalui dua titik hanya dapat dibuat satu garis”

Ini kontradiksi dengan pernyataan bahwa $B_1 \neq B_2$

Pengandaian $B_1 \neq B_2\ maka\ S_A(B_1) = S_A(B_2)$ tidak benar.

Jadi, $S_A(B_1) \neq S_A(B_2)$

Jadi S_A Injektif

Dari (a) dan (b) maka diperoleh S_A Surjektif dan S_A Injektif

Karena S_A Surjektif dan S_A Injektif, maka S_A Bijektif

Karena S_A Bijektif, maka $S_A$adalah suatu transformasi.

Jadi, terbukti bahwa suatu setengah putaran adalah transformasi.

Teorema 6.2

Andaikan A sebuah titik, g dan h dua garis tegak lurus yang berpotongan di A. Maka $S_A = M_g M_h$.

Bukti :

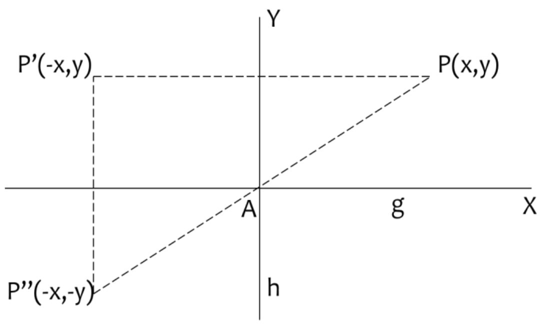
Diketahui A sebuah titik, g dan h dua garis tegak lurus yang berpotongan di A.

a. *Kasus I* : $P \neq A$

Karena $g \perp h$ maka dapat dibentuk sebuah sistem sumbu orthogonal dengan g sebagai sumbu X dan h sebagai sumbu Y. A sebagai titik asal.

Ambil titik $P \in V$

Perhatikan gambar berikut



Ditunjukkan bahwa untuk setiap P berlaku $S_A(P) = M_g M_h(P)$

Andaikan $P(x, y) \neq A$ dan $S_A(P) = P''(x_1, y_1)$

Karena $S_A(P) = P''$ maka A titik tengah PP' sehingga

$(0,0) = \left(\frac{x_1 + x}{2}, \frac{y_1 + y}{2}\right)$

Diperoleh $x_1 + x = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x$ dan $y_1 + y = 0 \Leftrightarrow y_1 = -y$

Artinya $S_A(P) = (-x, -y)$ ……………………………………………(1)

Komposisi pencerminan

$M_g M_h(P) = M_g[M_h(P)]$

$= M_g(-x, y)$

$= (-x, -y)$

Artinya $M_g M_h(P) = (-x, -y)$ ……………………………………………(2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh $_A(P) = M_g M_h(P)$.

Jadi, $S_A = M_g M_h$

b. *Kasus II* : $P = A$

Menurut Definisi, $S_A(A) = A$ .... (1)

$M_g M_h(A) = M_g(A) = A$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh $S_A(A) = M_g M_h(A)$.

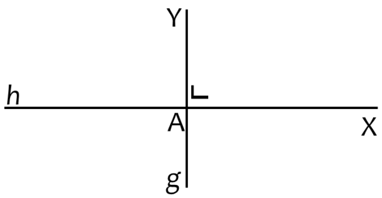
Jadi, $S_A = M_g M_h$.

Dari kasus I dan kasus II terbukti bahwa $S_A = M_g M_h$

Teorema 6.3

Jika g dan h dua garis yang tegak lurus maka $M_g M_h = M_h M_g$

Bukti :



a. *Kasus I* : $P \neq A$

Jika P≠A → misal P(x,y)

garis g sebagai sb Y dan garis h sebagai sb X

$$\left.\begin{array}{l} M_gM_h(P)=M_g(x,-y)=(-x,-y) \\ M_hM_g(P)=M_h(-x,y)=(-x,-y) \end{array}\right\} M_gM_h(P) = M_hM_g(P)$$

b. *Kasus II* : $P = A$

$$\text{Jika } P=A \rightarrow \left.\begin{array}{l} M_gM_h(A) = A \\ M_hM_g(A) = A \end{array}\right\} M_gM_h(A) = M_hM_g(A)$$

Dari kasus I dan kasus II terbukti bahwa $M_g M_h = M_h M_g$

Teorema 6.4

Jika S_A setengah putaran, maka $S^{-1}{}_A = S_A$.

Bukti :

Andaikan g dan h dua garis yang tegak lurus maka $M_g M_h = S_A$ dengan A titik potong antara g dan h.

$(M_g M_h)^{-1} = M^{-1}{}_h M^{-1}{}_g = S^{-1}{}_A$.

Karena $M^{-1}{}_h = M_h$ dan $M^{-1}{}_g = M_g$ maka $M_h M_g = S^{-1}{}_A$.

Karena $g \perp h$, maka menurut teorema 6.3, $M_g M_h = M_h M_g$.

Sedangkan menurut teorema 6.2, $S_A = M_g M_h$.

Sehingga diperoleh $S^{-1}{}_A = M_h M_g = M_g M_h = S_A$.

Jadi, $S^{-1}{}_A = S_A$.

Teorema 6.5

Jika $A = (a, b)$ dan $P = (x, y)$ maka $S_A(P) = (2a - x, 2b - y)$.

Bukti :

a. *Kasus I* : $P \neq A$

Misalkan $P" = (x_1, y_1)$ dan $S_A(P) = P"$ maka A titik tengah $PP"$ sehingga diperoleh

$$(a, b) = \left(\left(\frac{x_1 + x}{2}\right), \left(\frac{y_1 + y}{2}\right)\right)$$

Maka $\frac{x_1+x}{2} = a$ dan $\frac{y_1+y}{2} = b$ sehingga diperoleh

$\frac{x_1+x}{2} = a \Leftrightarrow x_1 + x = 2a \Leftrightarrow x_1 = 2a - x$ ………………………….. (1)

$\frac{y_1+y}{2} = b \Leftrightarrow y_1 + y = 2b \Leftrightarrow y_1 = 2b - y$ ………………………….. (2)

Dari persamaan (1) dan (2) maka $(x_1, y_1) = (\,2a - x), (2b - y)$

Karena $S_A(P) = P"$, maka $S_A(P) = (x_1, y_1) = (\,2a - x), (2b - y)$

Jadi, $S_A(P) = (2a - x, 2b - y)$.

b. *Kasus II* : $P = A$

Karena $P = A$, maka $(x, y) = (a, b)$ artinya $a = x$ dan $b = y$.

$S_A(P) = S_A(A) = A = (a, b)$

$(a, b) = \big((2a - a), (2b - b)\big)$

$\quad\quad = \big((2a - x), (2b - y)\big)$

Jadi, $S_A(P) = (2a - x, 2b - y)$.

Dari (a) dan (b) terbukti bahwa $S_A(P) = (2a - x, 2b - y)$.

Contoh 1

Diketahui : garis g dan titik A, $A \notin g$

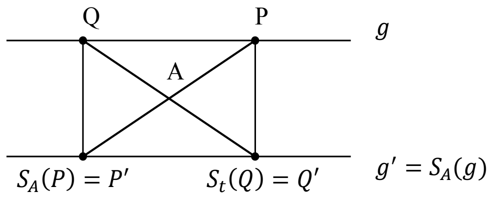
Ditanya :

a. Lukisan garis $g_1 = S_A(g)$ dan mengapa g sebuah garis?

b. Buktikan bahwa $g'//g$.

Jawab :

a. $g' = S_A(g)$



Karena g sebuah garis, maka $S_A(g)$ juga merupakan sebuah garis (isometri).

b. $g' \,//\, g$

Bukti :

$P \in g, Q \in g$

karena $P \in g$ maka A titik tengah PP' dengan $P' = S_A(P)$

karena $Q \in g$ maka A titik tengah QQ' dengan $Q' = S_A(Q)$

Perhatikan $\Delta APQ'\ dan\ \Delta AQP'$

Untuk membuktikan bahwa $g' \,//\, g$ maka harus ditunjukkan $\Delta APQ'\ dan\ \Delta AQP'$ adalah kongruen.

$m(< PAQ') = m(< QAP')$ (sudut bertolak belakang)

$PA = AP'$ (karena A titik tengah PP')

$Q'A = AQ$ (karena A titik tengah QQ')

Menurut *definisi kekongruenan (Sd S S)*

sehingga $\Delta APQ' \cong \Delta AQP'$

Karena $\Delta APQ' \cong \Delta AQP'$ maka $PQ' = QP'$

Karena $PQ' = QP'$ maka $g' \,//\, g$

Contoh 2

Diketahui himpunan H = $\{(x,y) \mid x^2 + 4y^2 = 16\}$ dan titik A = {4,3} dan C = {3,1}, g adalah sumbu X.

a. Selidi ki apakah $A \in M_gS_c(H)$?

b. Carilah persamaan $M_gS_c(H)$

Jawab :

a. $A \in M_gS_c(H) \leftrightarrow (M_gS_c)^{-1}(A) \in H$

$A \in M_gS_c(H) \leftrightarrow (S_cM_g)(A) \in H$ (1)

Jika P (x,y) → $M_g(P) = (x,-y)$

$S_c(P) = (2.3\text{-}x, 2.1\text{-}y) = (6\text{-}x, 2\text{-}y)$

Jadi $(M_gS_c)^{-1}(P) = S_cM_g(P) = S_c\{(x,-y)\} = (6-x,2+y)$ (2)

$(M_gS_c)^{-1}(A) = S_cM_g(A) = (2,-1)$

Dari (1) diperoleh $(2,-1) \notin H$ berarti $A \notin M_gS_c(H)$ (3)

b. $M_g\{S_c(H)\} = M\{S_c(x^2 + 4y^2 = 16)\}$

$= M_g\{(2.3\text{-}x)^2 + 4(2.1\text{-}y)^2 = 16\}$

$= M_g\{(6\text{-}x)^2 + 4(2+y)^2 = 16\}$

$= (6\text{-}x)^2 + 4(2+y)^2 = 16$ Pusat x = 6 dan y = -2

Atau $x^2 + 4y^2 - 12x+16y+36 = 0$

Dari (3) : $P(x,y) \in M_gS_c(H) \leftrightarrow P(x,y) \in |\{(x,y)\ \ x^2 + 4y^2 - 12x+16y+36 = 0\}$

Ini berarti : $M_gS_c(H) = x^2 + 4y^2 - 12x+16y+36 = 0$

Contoh 3

Diket: $D = (0,-3)$ dan $B = (2,6)$

Ditanya

a. $S_DS_B(B)$

b. $S_DS_K(K)$ apabila $K = (1,-4)$

Jawab :

a. $S_B(B) = (2.2 - 2, 2.6 - 6)$

$= (2,6)$

$S_DS_B(B) = S_D(2,6)$

$= (2.0 - 2, 2.(-3) - 6)$

$= (-2,-12)$

b. $K = (1,-4)$

$S_B(K) = \big(2.2 - 1, 2.6 - (-4)\big)$

$= (3,16)$

$S_DS_B(K) = S_D(3,16)$

$= (2.0 - 3, 2.(-3) - 16)$

$= (-3,-22)$

2. Lanjutan Setengah Putaran

Kita ingat kembali tentang refleksi atau pencerminan bahwa definisi refleksi atau pencerminan ialah

a. $M_g(A) = A, A \in g$

b. $M_g(P) = P'$, yang bersifat g adalah sumbu ruas garis $\overline{PP'}$

Jelas bahwa $\forall A \in g$ yang dicerminkan terhadap garis g maka A berimpit dengan petanya. Titik yang demikian dinamakan titik tetap (invariant) refleksi.

Definisi 6.2

A dinamakan titik tetap (invariant) transformasi T apabila berlaku T(A) = A

"Dari definisi tersebut, kita dapat memperoleh fakta bahwa sebuah refleksi garis g memiliki tak hingga banyaknya titik tetap yaitu semua titik pada sumbu refleksi g itu sendiri. Sedangkan pada sebuah setengah putaran di P (S_p), maka satu-satunya titik varian adalah P, sebab $S_p(P) = P$ dan $S_p(X) = X'$ dengan $X \notin P$ dan P titik tengah ruas garis $\overline{XX'}$".

Definisi 6.3

Sebuah transformasi T yang bersifat bahwa sebuah garis petanya juga garis dinamakan kolineasi

"Karena setiap isometrik adalah suatu kolineasi maka refleksi dan setengah putaran adalah suatu kolineasi. Diantara kolineasi tersebut ada yang disebut dilatasi"

Definisi 6.4

Suatu kolineasi dinamakan suatu dilatasi Δ jika untuk setiap garis g berlaku sifat $\Delta(g)//g$.

Teorema 6.6

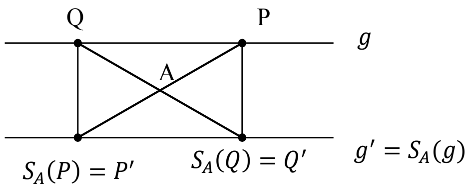
Andaikan S_A suatu setengah putaran, dan g sebuah garis. Apabila $A \notin g, maka\ S_A(g)//g$

Bukti :

Misal $P \in g, dan\ Q \in g$

karena $\mathrm{P \in g}$ maka A titik tengah $\mathrm{PP'}$ dengan $\mathrm{P' = S_A(P)}$

karena $\mathrm{Q \in g}$ maka A titik tengah $\mathrm{QQ'}$ dengan $\mathrm{Q' = S_A(Q)}$



Perhatikan $\Delta APQ'$ dan $\Delta AQP'$

Untuk membuktikan bahwa $g' // g$ maka harus ditunjukkan $\Delta APQ'$ dan $\Delta AQP'$ adalah kongruen.

$PA = AP'$ (karena A titik tengah PP')

$m(< PAQ') = m(< QAP')$ (sudut bertolak belakang)

$QA = AQ$ (karena A titik tengah QQ')

Menurut definisi kekongruenan (S Sd S)

sehingga $\Delta APQ' \cong \Delta AQP'$

Karena $\Delta APQ' \cong \Delta AQP'$ maka $PQ' = QP'$

Karena $PQ' = QP'$ maka $g' // g$

Jadi, $S_A(g)//g$

Contoh 4

Diketahui dua garis g dan h tidak sejajar. A sebuah titik yang tidak terletak pada g atau h. Tentukan semua titik X pada g dan semua titik Y pada h sehingga A titik tengah ruas garis $\overline{XY}$.

Jawab :

Ambil $P \in g$

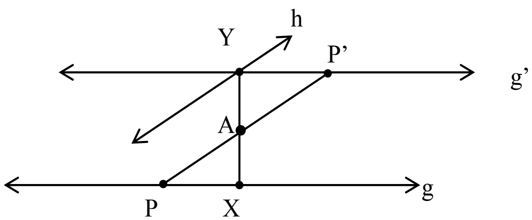
Jika $P' = S_A(P)$ maka $g' = S_A(g)$ melalui *P'* dan *PA=AP', g'//g*

Jika g' memotong h di Y

Tarik $\overleftrightarrow{YA}$ memotong g di X

Maka X dan Y pasangan titik yang dicari

Ilustrasi :



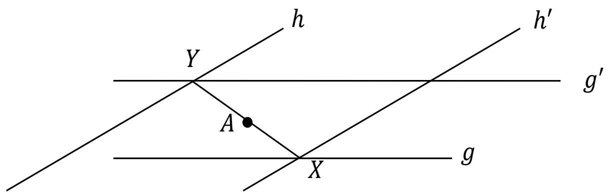
Dari contoh di atas, buktikan bahwa X dan Y satu-satunya pasangan yang memenuhi persyaratan, dan jika tidak menggunakan $g' = S_A(g)$ tapi $h'' = S_A(h)$ apakah akan memperoleh pasangan lain lalu jelaskan hal tersebut

Dipunyai : garis g dan h tidak sejajar

$A \notin g, A \notin h$,

Ditanya : Adb X dan Y satu-satunya pasangan yang memenuhi persyaratan.

Bukti :



Ambil $g\ tidak\ sejajar\ h, g\ tidak\ tegak\ lurus\ h, dan\ A \notin h$

Karena $A \notin h, maka\ S_A(h) = h' \,//\, h$

h' akan memotong g di titik X, sehingga $X \in h'$

karena $S_A(h) = h' \,//\, h$, maka $S_A(X) = Y \in h$

Karena titik potong dari dua garis atau lebih akan hanya ada satu titik potong,

Maka X dan Y satu-satunya pasangan .

sehingga $X \in h', X \in g, X \in XY, dan\ Y \in h, Y \in g', Y \in XY$

jadi, X dan Y satu-satunya pasangan.

Teorema 6.7

Hasil kali dua setengah putaran dengan pusat yang berbeda, tidak memiliki titik tetap

Bukti :

Misal $A, B \in V, A \neq B$

Akan dibuktikan $S_A S_B$ tidak memiliki titik tetap

Misal g = $\overleftrightarrow{AB}$

h $\perp \overleftrightarrow{AB}$ di A, k $\perp \overleftrightarrow{AB}$ di B

Akan ditunjukkan $S_A S_B = M_h M_k$

Karena $S_A = M_g M_h$, $S_B = M_g M_k$

Maka $S_A S_B = (M_g M_h)(M_g M_k)$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\left(M_g M_h \right) M_g \right] M_k \\
&= \left[M_g M_h M_g \right] M_k \\
&= \left[M_h M_g M_g \right] M_k \\
&= \left[M_h \left(M_g M_g \right) \right] M_k \\
&= \left(M_h I \right) M_k \\
&= M_h M_k
\end{aligned}
$$

Akan ditunjukkan $S_A S_B$ tidak memiliki titik tetap

Misal X titik varian $S_A S_B$

Jadi $S_A S_B$ (X) = X sehingga $\left(M_h M_k \right)\left(X \right) = X$

Jadi $\begin{aligned} &M_h\left[\left(M_h M_k \right) \right]\left(X \right) = M_h(X) \quad \ldots(1) \\ &\left[\left(M_h M_h \right) M_k \right]\left(X \right) = M_h(X) \quad \ldots(2) \end{aligned}$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$M_h\left(X \right) = IM_k\left(X \right) \Leftrightarrow M_h\left(X \right) = M_k\left(X \right)$

Misal $M_k\left(X \right) = X_1$

(i) *Kasus I* ($X \neq X_1$)

Misal $X \neq X_1 \rightarrow h \neq k$

Karena h dan k adalah sumbu ruas garis XX_1 dan ruas garis hanya memiliki satu sumbu maka h = k

Hal ini tidak mungkin sebab $A \neq B$

(ii) *Kasus II* ($X = X_1$)

Misal $X = X_1$

Maka M_h(X) = X dan M_k(X) = X

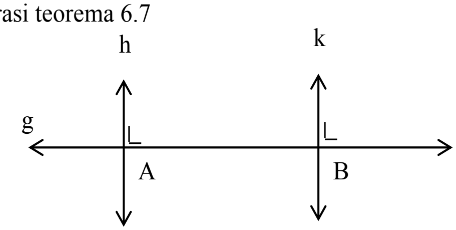
Jadi $X \in k, X \in h \ni$ h, k berpotongan di X

Hal ini tidak mungkin sebab h//k

Jadi, tidak mungkin ada sebuah titik X sehingga $M_h\left(X \right) = M_k\left(X \right)$ atau $S_A S_B\left(X \right) = X$.

Jadi, $S_A S_B$ tidak memiliki titik tetap.

Ilustrasi teorema 6.7



Teorema 6.8

Jika $A \neq B$ adalah dua titik maka hanya ada satu setengah putaran yang memetakan A pada B

Bukti :

Dipunyai $A \neq B$

Akan dibuktikan $S_T(A) = B$ dengan T titik tengah ruas garis $\overleftrightarrow{AB}$

Misal ada dua setengah putaran S_D dan S_E sehingga $S_D(A) = B$ dan $S_E(A) = B$

Jadi $S_D(A) = S_E(A)$

Maka $S^{-1}{}_D[S_D(A)] = S^{-1}{}_D[S_E(A)]$

Karena $S^{-1}{}_D = S_D$ maka $A = S_D[S_E(A)]$

Jadi jika $D \neq E$, maka berarti bahwa A adalah titik tetap dari $S_D S_E$

Hal ini tidak mungkin ada lebih dari satu setengah putaran yang memetakan A pada B. Satu-satunya setengah putaran adalah $S_T(A) = B$ dengan T titik tengah ruas garis $\overleftrightarrow{AB}$

Teorema 6.9

Suatu setengah putaran adalah suatu dilatasi yang bersifat involutorik

Dipunyai titik $P \in V$

Akan dibuktikan

a. g sebuah garis $\rightarrow S_P(g) // g$

b. $S_P S_P = I$ dengan *I* transformasi identitas

Bukti :

a. Jelas $S_P(g) = g'$ suatu garis.

   Misal $A \in g, B \in g$

   Maka $A \in g', B \in g'$ dan PA = PA', PB = PB'

   Karena PA = PA', PB = PB', dan $m(\angle APB) = m(\angle A'PB')$ sehingga $\Delta PAB \cong \Delta PA'B$ *(s sd s)*

   Jelas $m(\angle B'A'P) = m(\angle BAP)$

   Jadi $g // S_P(g)$ dan S_P sebuah dilatasi

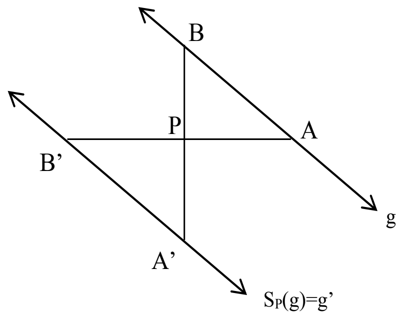
b. Karena $S_p S_p(A) = S_p(A') = A$, maka $\forall A \in g \ni S_P S_P(g) = I(g)$

   Jadi, $S_P S_P = I$.

Hal ini berarti S_P bersifat involuntorik

Dari pernyataan (a) dan (b) diperoleh fakta bahwa S_P sebuah dilatasi bersifat involuntorik. Atau dengan kata lain suatu setengah putaran adalah suatu dilatasi yang bersifat involutorik.

Ilustrasi :



Teorema 6.10

Apabila T suatu transformasi. H himpunan titik-titik dan A sebuah titik, maka $A \in T(H) \leftrightarrow T^{-1}(A) \in H$

Bukti :

Dipunyai T transformasi, H himpunan titik-titik, A sebuah titik

Akan dibuktikan $A \in T(H) \leftrightarrow T^{-1}(A) \in H$

$\Rightarrow$ Ambil $A \in T(H)$

Jadi $\exists X \in H \ni A = T(X)$

maka $T^{-1}(A) = T^{-1}[T(X)] = (T^{-1}T)(X) = I(X) = X$

Jadi $T^{-1}(A) \in H$

$\Leftarrow$ Ambil $T^{-1}(A) \in H$

Hal ini berarti $T[T^{-1}(A)] \in T(H)$ atau $A \in T(H)$

Contoh 5

Dipunyai : $E = \{(x, y) | x^2 + 4y^2 = 16\}$

Misal A = (4,-3) dan C = (3,1)

g adalah sumbu X

Ditanya : Selidiki apakah $A \in M_g S_c(E)$

Jawab:

Jelas $(M_g S_c)^{-1} = S^{-1}{}_c M^{-1}{}_g = S_c M_g$

Ambil P = (x,y)

Jelas $P = (x, y) \rightarrow M_g(P) = (x, -y)$

Jelas $S_c(P) = ((2.3) - x, (2.1) - y) = (6 - x, 2 - y)$

Jadi $(M_g S_c)^{-1}(P) = S_c M_g(P) = S_c(x, -y) = (6 - x, 2 + y)$

Sehingga $(M_g S_c)^{-1}(A) = (M_g S_c)^{-1}(4,3) = (6 - 4, 2 - 3) = (2, -1)$

Karena $(M_g S_c)^{-1}(A) = (2, -1) \notin E$ maka berarti bahwa $A \notin (M_g S_c)(E)$

Jadi, $A \notin (M_g S_c)(E)$

Dengan cara serupa, kita dapat menentukan persamaan peta suatu himpunan apabila persamaan himpunan telah diketahui.

Menurut teorema 6.10, $A \in T(H) \leftrightarrow T^{-1}(A) \in H$. Jika transformasi T adalah $M_g S_c(E)$ dengan $E = \{(x, y) | x^2 + 4y^2 = 16\}$, maka $P \in M_g S_c(E) \leftrightarrow (M_g S_c)^{-1}(P) \in E$.

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan sebelumnya, jika $P = (x, y)$ maka $(M_g S_c)^{-1}(P) = (6 - x, 2 + y)$

Jadi, $(M_g S_c)^{-1}(P) \in E \leftrightarrow (6 - x, 2 + y) \in \{(x, y) | x^2 + 4y^2 = 16\}$

Jadi haruslah $(6 - x)^2 + 4(2 + y)^2 = 16$

Hal ini berarti bahwa $P \in M_g S_c(E) \leftrightarrow P(x, y) \in \{x^2 + 4y^2 - 12x + 16y + 36 = 0\}$

Sehingga diperoleh fakta bahwa $x^2 + 4y^2 - 12x + 16y + 36 = 0$ adalah persamaan peta E oleh transformasi $M_g S_c$.

E. Tugas Kelompok

Diketahui : $g = \{(x, y) | y = 5x + 7\}$ dan $P = (-3,2)$

Ditanya : $S_P(g) = g'$?

F. Tes Formatif

1. Diketahui : titik A, B, P tak segaris dan berbeda.

   Lukis :

   a. $S_A(P)$

   b. $R \ni S_B(R) = P$

   c. $S_A S_B(P)$

   d. $S_B S_A(D)$

   e. ${S_A}^2(P)$

2. Diketahui : titik-titik A, B, C tak segaris

   Lukis :

   a. Garis g dan h sehingga $M_g(B) = B$ dan $S_A = M_g M_h$

   b. Garis k dan m sehingga ${M^{-1}}_k(C) = C$ dan $S_A = M_k M_m$

3. Diketahui : A = (2,3)

   Ditanya:

   a. S_A(C) apabila C = (2,3)

   b. S_A(D) apabila D = (-2,7)

   c. S_A(E) apabila E= (4,-1)

   d. S_A(P) apabila P = (x,y)

G. Tindak Lanjut

Buatlah catatan individu berkaitan dengan materi yang dipelajari dalam bab ini menggunakan bahasa sendiri

H. Daftar Pustaka

Eccles, Frank M. 1971. *An Introduction to Transformational Geometry Addison*. Wesley Publishing Company, Reading Massachusets.

Herstein, I.N. 1975. *Topics in Algebra*. New York: John Wiley & Sons.

Martin, George E. 1982. *Transformation Geometry*. New York: Springer-Verlag.

_______________. 1975. The *Foundations of Geometry and The Non-Euclidean Plane*. New York: Springer-Verlag.

Rawuh. 1994. *Geometri Transformasi*. Semarang: Universitas Negeri Semarang

Susanta, B. 1990. *Geometri Transformasi*. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.

Yaglom, I.M. 1962. *Geometric Transformations I*. New York: Random House.

BAB VII
GESERAN (TRANSLASI)

A. Sub – CPMK

Mahasiswa mampu memahami geseran (translasi)

B. Gambaran Umum Materi

Pada bab ini mahasiswa akan belajar tentang materi geseran (translasi) yang merupakan hasil kali dua pencerminan pada dua garis yang sejajar.

C. Relevansi Terhadap Pengetahuan Mahasiswa dan Bidang Kerja

Dengan mempelajari materi geseran (translasi), mahasiswa akan memahami konsep materi geseran (translasi) sehingga dapat digunakan sebagai bekal mahasiswa saat mempelajari materi berikutnya yang berkaitan dengan geseran (translasi) beserta aplikasinya.

D. Sub Bab

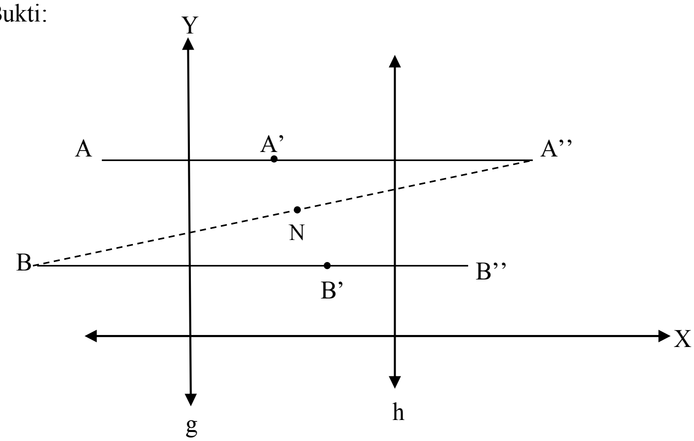
Ketentuan dan Sifat-sifat

Dalam Bab setengah putaran, bahwa setengah putaran dapat ditulis sebagai hasil kali dua pencerminan, yaitu kalau A sebuah titik yang diketahui dan g, h dua garis yang tegak lurus di A maka $S_A = M_g M_h$. Dalam Bab ini akan dibahas hasil kali dua pencerminan pada dua garis yang sejajar.

Teorema 7.1

Andaikan gdan h dua garis yang sejajar. Apabila ada dua titik A danB maka $\overline{AA'} = \overline{BB''}$ dengan $A'' = M_h M_g(A)$ dan $B'' = M_h M_g(B)$

Bukti:



Ambil titik A dan B sebarang dengan A≠B dan $A \notin g, A \notin h, B \notin g, B \notin h$

Andaikan A = (a_1, a_2) dan B = (b_1, b_2)

Akan dibuktikan S_N(A) = B" dengan N adalah titik tengah $\overline{A"B}$.

Andaikan persamaan garis h adalah x = k, k ≠ 0.

Ambil titik P(x,y), P∉ h

Diperoleh M_h(P) = P', sehingga $\overline{PP'}$ memotong h di titik Q. Karena h:x = k, dan P(x,y) maka titik potong Q = (k,y) dengan Q adalah titik tengah$\overline{PP'}$

Karena Q(k,y) dan P(x,y),maka dimisalkan P' = (x_1,y_2) maka diperoleh

$$Q = \left(\frac{x_1 + x}{2}, \frac{y_1 + y}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow (k, y) = \left(\frac{x_1 + x}{2}, \frac{y_1 + y}{2} \right)$$

Sehingga

$$\frac{x_1 + x}{2} = k$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 + x = 2k$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = 2k - x$$

$$\frac{y_1 + y}{2} = y$$

$$\Leftrightarrow \quad y_1 + y = 2y$$

$$\Leftrightarrow \quad y_1 = y$$

Jadi, M_h(P) = P' = (2k-x, y)

Karena garis g adalah sumbu koordinat y maka M_g(P) = P" = (-x,y)

Jadi $M_h M_g(p) = M_h[M_g(p)]$

$$\begin{aligned} &= M_h[(-x, y)] \\ &= (2k - (-x), y) \\ &= (2k + x, y) \end{aligned}$$

Karena $A = (a_1, a_2)$ dan $B = (b_1, b_2)$

Maka A" $= M_h M_g(A)$

$$= M_h[M_g(A)]$$
$$= M_h(-a_1, a_2)$$
$$= (2k + a_1, a_2)$$

B” $= M_h M_g(B)$

$$= M_h[M_g(B)]$$
$$= M_h(-b_1, b_2)$$
$$= (2k + b_1, b_2)$$

Karena N titik tengah $\overline{A"B}$,

Maka $N = \left(\frac{(2k + a_!) + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right)$

Jika $N = \left(\frac{2k + a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right)$ dan A = (a_1, a_2)

maka $S_N(A) = \left(2\left(\frac{2k + a_1 + b_1}{2} \right) - a_1, 2\left(\frac{a_2 + b_2}{2} \right) - a_2 \right)$

$$= (2k + b_1, b_2)$$
$$= B^{"}$$

Dengan demikian maka $\overline{AA"} = \overline{BB"}$

Jadi setiap ruas berarah, dengan pangkal sebuqh titik dan berakhir di titik petanya oleh $M_h M_g$ adalah ekivalen dengan setiap garis berarah seperti di atas. Jadi hasil transformasi $M_h M_g$ adalah seakan-akan menggeser setiap titik sejauh jarak yang sama dan searah. Transformasi demikian dinamakan translasi (geseran).

Teorema 7.2

Apabila $\overline{AB} = \overline{CD}$ maka $G_{AB} = G_{CD}$

Bukti:

Dipunyai $\overline{AB} = \overline{CD}$

Ambil x sebarang

Misalkan $G_{AB}(x) = x_1$ dan $G_{CD}(x) = x_2$

Maka $\overline{xx_1} = \overline{AB}$ dan $\overline{xx_2} = \overline{CD}$

Karena $\overline{AB} = \overline{CD}$ maka $\overline{xx_1} = \overline{xx_2}$

Ini berarti bahwa $x_1 = x_2$

Jadi $G_{AB} = G_{CD}$

Teorema 7.3

Andaikan g dan h dua garis yang sejajar dan $\overline{CD}$ sebuah garis berarah tegak lurus pada g dengan C ∈ g dan D ∈ h. Apabila $\overline{AB} = 2\overline{CD}$ maka $G_{AB} = M_h M_g$

Bukti:

Ambil titik P sebarang

Misal P' = G_{AB}(P) dan P" = $M_h M_g$(P)

Akan dibuktikan P'= P"

Menurut definisi geseran $\overline{PP'} = \overline{AB}$

Karena $\overline{AB} = 2\overline{CD}$, maka $\overline{PP'} = 2\overline{CD}$

Berhubung $C \in g$ maka $M_h M_g(C)$

$$= M_h[M_g(c)]$$
$$= M_h(c)$$
$$= C''$$

Ini berarti D titik tengah $\overline{CC''}$, sehingga $\overline{CC''} = 2\overline{CD}$

Berdasarkan teorema 7.1 diperoleh $\overline{CC''} = \overline{PP''}$

Jadi$\overline{CC''} = 2\overline{CD} = \overline{PP''}$ maka P'=P"

Jadi G_{AB}(P) = $M_h M_g$(P)

Karena P titik sebarang maka $G_{AB} = M_h M_g$

Catatan

1. Dari teorema di atas dapat disimpulkan bahwa setiap geseran G_{AB} dapat ditulis sebagai hasilkali dua refleksi pada dua garis yang tegak lurus pada $\overleftrightarrow{AB}$ dan berjarak ½ AB.
2. Jika $\overleftrightarrow{AB}$ sebuah garis dan M titik tengah $\overline{AB}$ sedangkan g, h dan n tiga garis masing-masing tegak lurus di A, di M dan di B pada $\overleftrightarrow{AB}$ maka $G_{AB} = M_h M_g = M_n M_h$.
3. Karena setiap geseran sebagai hasilkali dua reflexi sedangkan reflexi adalah suatu transformasi maka suatu geseran adalah suatu transformasi yang merupakan isometri. Jadi suatu reflexi adalah suatu isometri. Suatu geseran adalah suatu isometric langsung sebab setiap reflexi adalah suatu isometri lawan.

Teorema 7.4

Jika G_{AB} sebuah geseran maka $(G_{BA})^{-1} = G_{BA}$

Bukti:

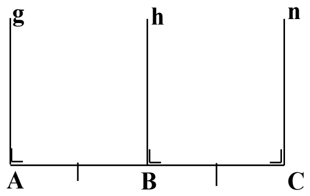
Teorema Geseran adalah hasil kali dua refleksi

Teorema Refleksi adalah trasformasi

Teorema Tiap transformasi memiliki balikan

Maka setiap geseran memiliki balikan

Perhatikan gambar berikut:



Dari uraian diatas

Diperoleh $G_{AB}(A) = M_hM_g(A)$

$= M_h[M_g(A)]$

$= M_h(A)$

$= B$

$G_{AB}(A) = M_nM_h(A)$

$= M_n[M_h(A)]$

$= M_n(B)$

$= B$

Jadi $G_{AB}(A) = M_hM_g(A) = M_nM_h(A)$ atau $G_{AB} = M_hM_g = M_nM_h$

Sedangkan $G_{BA}(B) = M_hM_n(B)$

$= M_h[M_n(B)]$

$= M_h(B)$

$= A$

$G_{BA}(B) = M_gM_h(B)$

$= M_g[M_h(B)]$

$= M_g(A)$

$= A$

Jadi $G_{BA}(B) = M_hM_n(B) = M_gM_h(B)$ atau $G_{BA} = M_hM_n = M_gM_h$

Sehingga $(G_{AB})^{-1} = (M_nM_h)^{-1}$

$= M_h^{-1}M_n^{-1}$

$= M_hM_n$

$= G_{BA}$

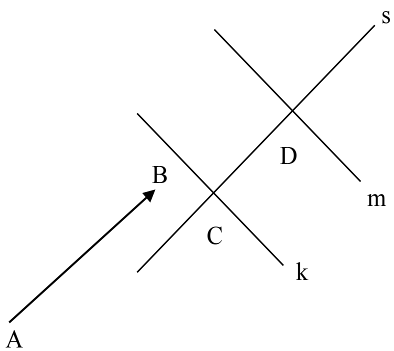
Jadi $(G_{AB})^{-1} = G_{BA}$

Suatu translasi dapat dinyatakan dalam bentuk komposisi dari dua pencerminan. Pada bagian ini akan diperlihatkan bahwa setiap translasi dapat diuraikan sebagai komposisi dua setengah putaran. Komposisi translasi adalah translasi juga.

Teorema 7.5

Jika G_{AB} sebuah translasi sedangkan C dan D adalah dua titik sehingga $\overrightarrow{AB} = 2\ \overrightarrow{CD}$ maka $G_{AB} = S_DS_C$.

Bukti :



Andaikan $g = \overrightarrow{CD}$, $k \perp g$ di C ,

$m \perp g$ di D.

Diketahui $\overrightarrow{AB} = 2\ \overrightarrow{CD}$ maka

$G_{AB} = M_mM_k$

$_{D}S_C = (M_mM_g)(M_gM_k)$

$= M_m(M_gM_g)M_k$

$= M_mIM_k$

$= G_{AB}$

Jadi : $G_{AB} = S_DS_C$

Teorema 7.6

Jika G_{AB} adalah suatu translasi dan S_c adalah setengah putaran maka $G_{AB}S_C$=S_D dengan titik sedemikian hingga $\overrightarrow{AB} = 2\ \overrightarrow{CD}$.

Bukti :

$G_{AB}S_C = (S_DS_C)\ S_C$

$= S_D\ (S_CS_C)$

$= S_D$

$= S_D$

Teorema 7.7

Jika S_A, S_B, S_C adalah setengah putaran setengah putaran maka $S_CS_BS_A = S_D$ dengan D adalah titik yang memenuhi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Bukti :

$S_C S_B = G_{ABC} \rightarrow S_C S_B S_A = G_{2BC} S_A$.

Andaikan $G_{2BC} S_A = S_x$ maka $2\ \overrightarrow{BC} = 2\ \overrightarrow{AX}$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AX}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AX} \\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \end{array}\right\} X = D$$

Jadi $S_C S_B S_A = S_D$.

Teorema 7.8

Jika G_{OA} sebuah translasi yang ditentukan oleh titik-titik O (0,0) dan A (a,b) dan T (transformasi) yang didefinisikan untuk setiap titik P(x,y) sebagai T(P) = (x+a, y+b), maka $T = G_{OA}$.

Bukti :

untuk P = (x,y), T(P) = (x+a, y+b)

andaikan $G_{OA}(P) = P' \rightarrow \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OA}$

$$P' = (x+a-0,\ y + b - 0) = (x + a,\ y + b)$$

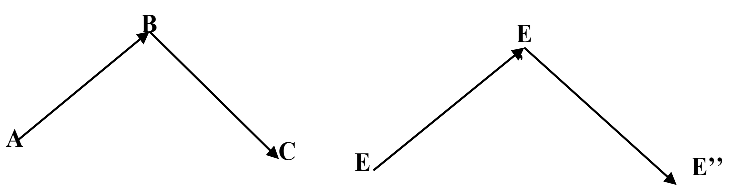
Jadi, $T(P) = G_{OA}(P),\ \forall P \in V$, Ini berarti $T = G_{OA}$.

Teorema 7.9

Hasil kali dua translasi adalah sebuah translasi

Bukti :

Andaikan dua buah geseran yaitu G_{AB} dan G_{BC}



Diperoleh $G_{AB}(A) = B$ dan $G_{BC}(B) = C$

Jika G_{BC} dikomposisikan dengan G_{AB} melalui A

maka didapat $G_{BC}G_{AB}(A) = G_{BC}[G_{AB}(A)]$

$$= G_{BC}(B)$$

$$= C$$

Andaikan titik E sebarang

Diperoleh $G_{AB}(E) = E'$

Berarti $\overline{EE'} = \overline{AB}$

$G_{BC}(E') = E''$

Berarti $\overline{E'E''} = \overline{BC}$

Jika G_{BC} dikomposisikan dengan G_{AB} melalui titik E, maka diperoleh

$G_{BC}G_{AB}(E) = G_{BC}[G_{AB}(E)]$

$= G_{BC}(E')$

= E”

Berarti $\overline{EE''} = \overline{AC}$ sehingga diperoleh

$G_{EE''}(E) = E'' = G_{AC}$

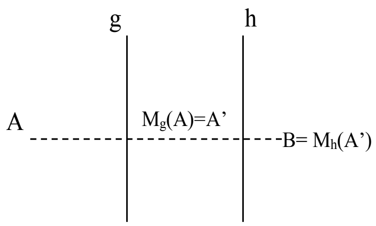
Jadi $G_{BC}G_{AB} = G_{AC}$

Contoh 1

Diketahui : Garis-garis g//h dan titik A tidak pada garis-garis tersebut.

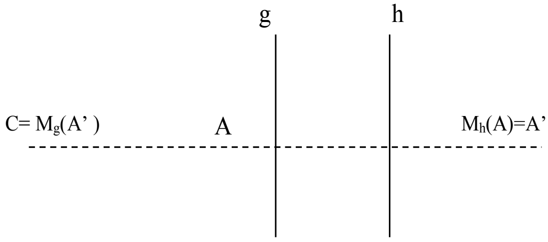
a. Lukislah titik B sehingga $M_hM_g = G_{AB}$

Jelas $G_{AB}(A) = M_hM_g(A) = M_h(A') = B$



b. Lukislah titik C sehingga $M_gM_h = G_{AC}$

Jelas $G_{AC}(A) = M_gM_h(A) = M_g(A') = C$



Contoh 2

Diketahui : Titik-titik A(-1,3), B(-5,-1), dan C(2,4).

Tentukan $C' = G_{AB}(C)$.

Jawab:

Karena $C' = G_{AB}(C)$ maka $\overline{CC'} = \overline{AB}$

Jelas
$$\begin{aligned} & CC' = AB \\ \Leftrightarrow\ & CC'^2 = AB^2 \\ \Leftrightarrow\ & (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ \Leftrightarrow\ & (x_2 - 2)^2 + (y_2 - 4)^2 = (-5+1)^2 + (-1-3)^2 \\ \Leftrightarrow\ & (x_2 - 2)^2 + (y_2 - 4)^2 = (-4)^2 + (-4)^2 \end{aligned}$$

Sehingga $x_2 - 2 = -4 \Leftrightarrow x_2 = -2$ dan $y_2 - 4 = -4 \Leftrightarrow y_2 = 0$.

Jadi $C' = G_{AB}(C) = (-2{,}0)$.

Contoh 3

Diketahui ruas garis berarah $\overline{AB}$ dan titik-titik C dan P

a. Tentukan $G_{AB}S_C(P)$

Jawab :

$G_{AB}S_C(P) = G_{AB}[S_C(P)]$

$= G_{AB}(P')$ dengan C adalah titik tengah $\overline{PP'}$

$= P''$ dengan $\overline{P'P''} = \overline{AB}$

b. Tentukan $S_CG_{AB}(P)$

Jawab :

$S_CG_{AB}(P) = S_C[G_{AB}(P)]$

$= S_C(P')$ dengan $\overline{PP'} = \overline{AB}$

$= P''$ dengan C titik tengah $\overline{P'P''}$

Contoh 4

G adalah geseran yang ditentukan sebagai berikut:

Jika P=(x,y) maka $G(P) = (x+2, y+3)$. Diketahui $C = (1, -7)$.

Tentukan koordinat D sehingga $S_DS_C = G$

Jawab :

$S_DS_C(P) = G(P)$

Misalkan $D(a,b)$

$[2a-(2-x), 2b-(-14-y)] = (x+2, y+3)$

a. $2a-(2-x) = x+2$

   $2a = x+2+2-x$

   $2a = 4$

   $a = 2$

b. $2b-(-14-y) = y+3$

   $2b = y+3-14-y$

   $2b = -11$

   $b = -5{,}5$

Jadi titik $D(2, -5{,}5)$

E. Tugas Kelompok

Diketahui Titik-titik A, B, dan C yang tak segaris

a. Lukislah $G_{AB}(A)$ dan $G_{AB}(B)$

b. Lukislah $G_{AB}(C)$

c. Lukislah garis-garis g dan h dengan $A \in g$ dan $G_{AB} = M_h M_g$

d. Lukislah garis-garis g dan h sehingga $C \in g$ dan sehingga $G_{AB} = M_h M_g$

F. Tes Formatif

1. Diketahui: Titik-titik A = (2,-1), B = (3,4), dan g ={(x,y) | y+2x=4}.
   a. Tentukan $G_{AB}(P)$ jika P(x,y).
   b. Tentukan titik D sehingga $G_{AB}(D) = (1,3)$.
   c. Tentukan sebuah persamaan untuk garis h sehingga $h = G_{AB}(g)$.
2. Diketahui titik-titik A, B, C yang tak segaris
   a. Tentukan D sehingga $S_D S_C = G_{AB}$
   b. Tentukan E sehingga $S_A S_B S_C = S_E$
   c. Tentukan F sehingga $G_{AB} S_C = S_F$
3. a. Untuk semua titik P = (x,y), S ditentukan sebagai S(P) = (x+a, y+b).
      Tentukan $S^{-1}(P)$.
   b. Jika G_1 dan G_2 adalah geseran-geseran, selidiki apakah $G_1 G_2 = G_2 G_1$.

G. Tindak Lanjut

Buatlah catatan individu berkaitan dengan materi yang dipelajari dalam bab ini menggunakan bahasa sendiri

H. Daftar Pustaka

Eccles, Frank M. 1971. *An Introduction to Transformational Geometry Addison*. Wesley Publishing Company, Reading Massachusets.

Herstein, I.N. 1975. *Topics in Algebra*. New York: John Wiley & Sons.

Martin, George E. 1982. *Transformation Geometry*. New York: Springer-Verlag.

______________. 1975. The *Foundations of Geometry and The Non-Euclidean Plane*. New York: Springer-Verlag.

Rawuh. 1994. *Geometri Transformasi*. Semarang: Universitas Negeri Semarang

Susanta, B. 1990. *Geometri Transformasi*. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.

Yaglom, I.M. 1962. *Geometric Transformations I*. New York: Random House.

BAB VIII
PUTARAN (ROTASI)

A. Sub – CPMK

Mahasiswa mampu memahami putaran (rotasi)

B. Gambaran Umum Materi

Pada bab ini mahasiswa akan belajar tentang materi putaran (rotasi) yang mempunyai sudut berarah dengan salah satu kakinya ditentukan sebagai kaki awal dan kaki yang lain ditentukan sebagai kaki akhir yang perpotongannya merupakan sudut lancip atau tumpul dan bukan merupakan garis tegak lurus ataupun sejajar.

C. Relevansi Terhadap Pengetahuan Mahasiswa dan Bidang Kerja

Dengan mempelajari materi putaran (rotasi), mahasiswa akan memahami konsep materi putaran (rotasi) sehingga dapat digunakan sebagai bekal mahasiswa saat mempelajari materi berikutnya yang berkaitan dengan putaran (rotasi) beserta aplikasinya.

D. Sub Bab

1. Pengertian Sudut Berarah

Definisi 8.1

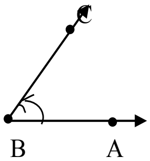
Sebuah sudut berarah adalah suatu sudut, yang salah satu kakinya ditentukan sebagai kaki awal dan kaki yang lain ditentukan sebagai kaki akhir.

Untuk melambangkan bahwa suatu sudut misalnya $\angle$ ABC adalah sutu sudut berarah dengan sinar $\overrightarrow{BA}$ sebagai kaki awal dan $\overrightarrow{BC}$ sebagai kaki akhir, kita tulis $\measuredangle$ABC. Lambang $\measuredangle$ BAC adalah untuk sudut berarah dengan kaki awal $\overrightarrow{BC}$ dan kaki akhir $\overrightarrow{BA}$.

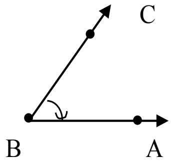
Untuk melambangkan besarnya sebuah sudut berarah kita tentukan hal-hal berikut :

m ($\measuredangle$ ABC) = m ($\angle$ ABC) apabila orientasi ganda (BAC) adalah positif.

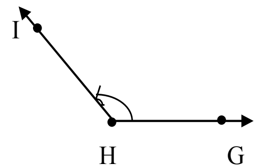
m ($\measuredangle$ ABC) = -m($\angle$ ABC) apabila orientasi ganda (BAC) adalah negatif.



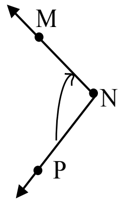
$m(\angle ABC) = 45$



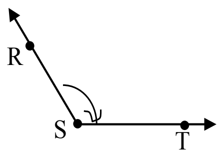
$m(\angle ABC) = -45$



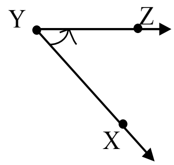
$m(\angle GHI) = 150$



$m(\angle PNM) = -90$



$m(\angle RST) = -150$



$m(\angle XYZ) = 30$

Apabila $\angle$ ABC sebuah sudut, maka $\angle$ ABC = $\angle$ CBA sehingga m($\angle$ ABC = $\angle$CBA).

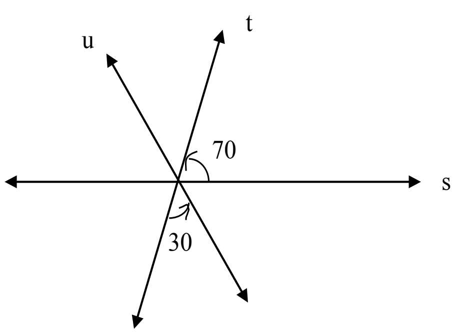
Tetapi untuk sudut berarah, $\angle$ ABC, berlaku m($\measuredangle$ ABC) = -m($\measuredangle$ CBA).

Ini disebabkan orientasi ganda (BAC) selalu lawan orientasi ganda (BCA).

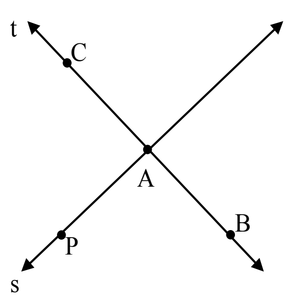
2. Sudut Antara Dua Garis

Apabila ada dua garis berpotongan yang tidak tegak lurus, maka sudut antara kedua garis itu kita pilih sudut lancip. Sebab ada dua sudut yang bertolak belakang, satu pasang lancip dan satu pasang tumpul.

Pada gambar 8.a besarnya sudut antara garis s dan garis t adalah 70, sedangkan besarnya sudut antara s dan u adalah 80.



Gambar 8.a

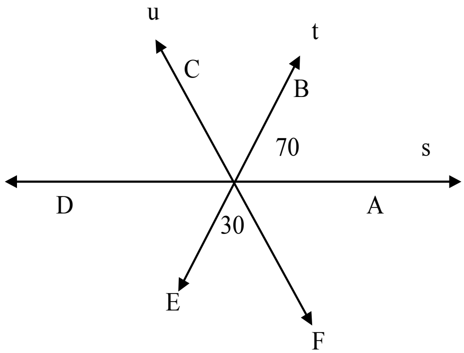


Gambar 8.b

Kita sekarang akan lebih merinci sudut antara dua garis sebagai berikut. Andaikan garis s dan garis t berpotongan dititik A (gambar 8.b). Andaikan P sebuah titik pada s sedangkan

B dan C dua titik pada t sehingga A terletak antara B dan C. Jika ∠ PAB lancip, maka dikatakan bahwa sudut dari s ke t adalah sudut ∠ PAB. Jika ∠ PAB tumpul, maka sudut dari s ke t adalah ∠ PAC.

Pada gambar b jika m(∡ PAB) = 150, maka besarnya sudut dari s ke t adalah m(∡ CAP) = -30 sedangkan besarnya sudut dari t ke s adalah m(∡ CAP) = 30



Gambar 8.c

Pada gambar c anda akan dapat melihat bahwa:

1. Sudut dari s ke t : m(∠APB) = 70
2. Sudut dari s ke u : m(∠DPC) = -80
3. Sudut dari u ke t : m(∠CPB) = -30

Sehingga dapat dikatakan bahwa sudut berarah dari satu garis ke gais lain dapat berkisar antara -90 hingga +90. sedangkan sudut antara dua garis dapat berkisar antara 0 dan 90.

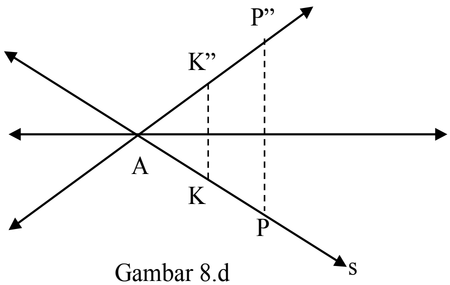
Dengan didasari oleh sudut-sudut berarah di atas kita sekarang dapat menyelidiki lebih lanjut hasil kali refleksi-refleksi yang sumbu-sumbunya tidak saling tegak lurus dan juga tidak sejajar. Sifat ini dituangkan dalam teorema berikut.

Teorema 8.1

Andaikan s dan t dua garis yang tidak saling tegak lurus dan yang berpotongan di titik A. Andaikan P dan Q dua titik yang berlainan dengan A, maka m($\angle$PAP") = m($\angle$ QAQ"), dengan P" = M_tM_s(P) dan Q" = M_tM_s(Q).

Bukti:

Kasus 1. Andaikan P dan K terletak pada garis s (gambar 8.d)



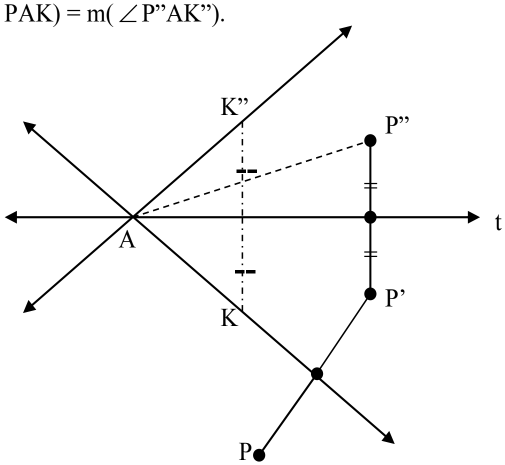
Gambar 8.d

Maka M_tM_s(A) = A. Sebut peta ini A", jadi A" = A. Oleh karena M_tM_s sebuah isometri, maka P", K" dan A" = A terletak pada satu garis yang melalui A. Sehingga m($\angle$PAP") = m($\angle$KAK").

Apabila P $\notin$ s, dan karena besarnya sudut-sudut tidak berubah terhadap isometri, maka m($\angle$PAK) = m($\angle$P"AK").

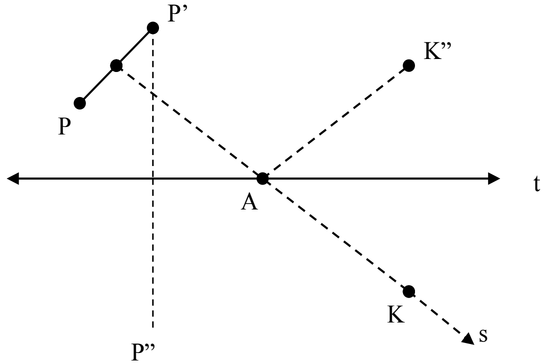
Oleh karena komposit dua refleksi garis adalah sebuah isometri langsung maka orientasi ganda (APK) sama dengan orientasi ganda (AP"K").

Jadi m($\angle$PAK) = m($\angle$P"AK").



Gambar 8.e

Kasus 2. Apabila kedudukan P seperti dalam gambar 8.e maka m($\angle$PAP") = m($\angle$PAK) + m($\angle$KAP"). Sedangkan m($\angle$KAK") = m($\angle$KAP") + m($\angle$P"AK"). Sehingga m($\angle$PAP") = m($\angle$KAK").



Gambar 8.f

Kasus 3. Dengan cara yang serupa untuk kedudukan P seperti pada gambar 8.f, dapat pula dibuktikan bahwa m ($\angle$PAP'') = m ($\angle$KAK").

Bukti

P,K $\notin$ s dan P,K $\notin$ t

$\angle A_1 = \angle A_2$

$(\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3) = \angle A_4$ (1)

$\angle A_5 = \angle A_6$

$\angle A_5 = \angle A_2 + \angle A_3$ (2)

$\angle PAP" = \angle A_3 + \angle A_4$ (3)

Dari (1) dan (2) diperoleh $\angle A_1 + \angle A_5 = \angle A_4$ (4)

(4) subtitusikan ke (3) diperoleh

$$
\begin{aligned}
PAP" &= \angle A_3 + \angle A_1 + \angle A_5 \\
&= \angle A_3 + \angle A_2 + \angle A_5 \\
&= \angle A5 + \angle A_5 \\
&= \angle A_5 + \angle A_6 \\
&= \angle KAK"
\end{aligned}
$$

Jadi untuk setiap titik P $\neq$ A kita peroleh

m($\angle$PAP") = m ($\angle$KAK")

begitu pula untuk titik Q :

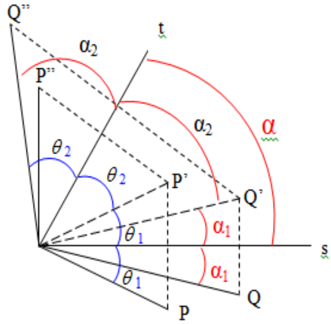
m($\angle$QAQ") = m($\angle$KAK")

sehingga

m($\angle$QAQ") = m($\angle$PAP")

jadi oleh transformasi M_tM_s setiap titik berputar dengan sudut berarah yang sama mengelilingi titik yang sama.

Atau dengan cara yang berbeda dapat dibuktikan sebagai berikut



$$\left.\begin{aligned} M_tM_s(P) &= P'' \\ M_tM_s(Q) &= Q'' \end{aligned}\right\} m\angle(PAP'') = m\angle(QAQ'')$$

$$\begin{aligned} m\angle(PAP'') &= \theta_1 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_2 \\ &= 2(\theta_1 + \theta_2) \\ &= 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\angle(QAQ'') &= \alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 \\ &= 2(\alpha_1 + \alpha_2) \\ &= 2\,\alpha = m\angle(PAP'') \end{aligned}$$

Kesimpulan : $m\angle(PAP'') = m\angle(QAQ'')$

3. Rotasi

Definisi 8.2

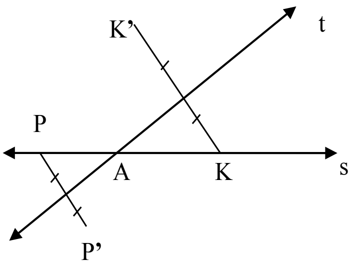
Andaikan A sebuah titik dan φ sebuah bilangan yang memenuhi $-180^0 < \varphi < +180^0$. Sebuah rotasi mengelilingi A adalah sebuah padanan $R_{A\varphi} : V \rightarrow V$ yang ditentukan sebagai berikut :

a. $R_{A\varphi}(A) = A$

b. Jika $P \neq A$ maka $R_{A\varphi}(P) = P''$ sehingga $m(PAP'') = \varphi$ dan $AP' = AP$

Teorema 8.2

Jika s dan t dua garis yang tidak tegak lurus dan yang berpotongan di A dan jika sudut antara garis s ke garis t adalah ½ φ, maka $R_{A\varphi} = M_tM_s$.



Bukti :

Andaikan sebuah titik P ≠ A dan titik K ≠ A pada s.

Andaikan K' = M_tM_s (K) maka m(∠KAK') = 2 x ½ φ = φ. Jika P' = M_tM_s (P) maka menurut teorema m(∠PAP') = m(∠KAK').

Sehingga m(∠PAP') = φ.

Berhubung A' = M_tM_s (A) = A dan berhubung M_tM_s sebuah isometri maka P'A' = PA atau PA = P'A. Menurut ketentuan maka M_tM_s = RAφ. Menurut teorema di atas, komposit dua refleksi terhadap dua garis yang berpotongan tidak tegak lurus adalah sebuah rotasi dengan titik potong kedua garis itu sebagai pusat.

Jika kaki-kaki sudut BA dan BC membentuk dua sinmar yang berlawanan arah, sehingga misalnya (CBA), kita juga dapat mengatakan bahwa BA U BC adalah sudut ABC dengan ukuran 180. Kita dapat menulis m(ABC) = 180 atau m(ABC) = -180 dengan perluasan konsep sudut ini, kikta juga dapat mendefinisikan rotasi dengan sudut ukuran +180 atau -180. Maka rotasi demikian tidak lain suatu setengah putaran.

Sehingga dapat dikatakan bahwa :

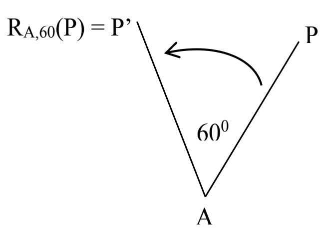
Akibat 1 : Hasil kali dua refleksi pada dua garis adalah suatu rotasi atau suatu translasi.

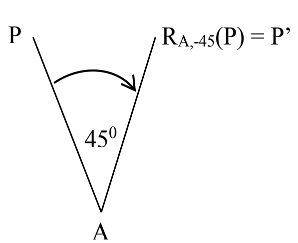
Akibat 2 : Setiap rotasi adalah isometri langsung.

Contoh 1

Diketahui titik – titik A dan P yang berbeda. Lukislah $R_{A,60}$(P) dan $R_{A,-45}$(P)

Jawab :





4. Komposisi (hasil kali) putaran.

Pada pembahasan sebelumnya telah Anda lihat bahwa hasil kali atau komposisi dua putaran dengan satu pusat adalah transformasi identitas. Transformasi identitas ini dapat dianggap sebagai sebuah putaran pula dengan sudut putar sebesar 0. jadi dapat dikatakan bahwa himpunana putaran-putaran mengelilingi titik yang sama adalah tertutup terhadap komposisi.

$R_{A,120}\, R_{a,30} = R_{A,150}$; $R_{A,160.}\, R_{A,40} = R_{A,120}$; $R_{A,150}\, R_{A,120} = R_{A,90}$

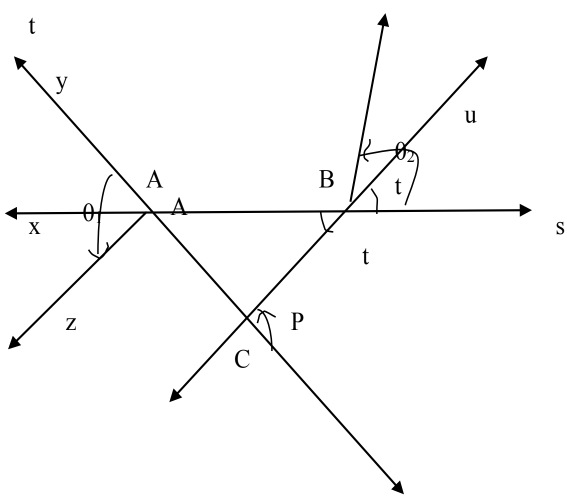
Dengan demikian, ditambah bahwa ($R_{A,\varphi} = R_{A,-\varphi}$) maka himpunan rotasi-rotasi mengelilingi satu titik A adalah sebuah grup. Bagaimana apabila pada sebuah titik pada bidang dilakukan dua rotasi mengelilingi dua titik berbeda A dan B masing-masing dengan sudut rotasi masing-masing φ dan φ)

Jawaban dari pertanyaan tersebut dapat dituangkan dalam teorema berikut;

Teorema 8.3

Hasilkali dua rotasi adalah sebuah rotasi atau sebuah translasi.

Bukti :



Gambar 8.g

Andaikan ada rotasi $R_{A,}$ö1 dan rotasi $R_{B,}$ ö2 Tarik garis S = AB.

Jika m (< XAY) = m(< XAZ) = ½ ö $_1$ maka $R_{A,}$ö $_1$ = dan $R_{B,}$ö$_1$ = $M_{s,}M_t$ jadi $R_{B,}$ö$_2$ $R_{AA,}$ ö $_1$ = ($M_{U,}\, M_S$)

$(M_S, M_t) = M_u, M_t$

Apabila u//t, maka $R_{B,ö2}.R_{A,ö1}$ adalah suatu geseran. Kalau u dan t berpotongan di C maka M_u, M_t adalah suatu rotasi yang berpusat di C.

Andaikan $R_{c,ö} = R_{B,ö2} R_{A,ö1}$ hubungan apakah terdapat antara ö , $ö_1$ dan $ö_2$?

Dari gambar 8.g kita lihat bahwa m (< ABC) = ½- $ö_2$ sedangkan m (< BAC) = ½ $ö_1$ .Dengan demikian m (< PCB) = ½ ($ö_1 + ö_2$). Ini bearti bahwa sudut dari t ke u adalah ½ ($ö_1 + ö_2$).Sehingga 2 ö = $ö_1 + ö_2$,Jika $ö_1 + ö_2 > 180$ maka ö =($ö_1 + ö_2$) - 360

Sebagai gmbaran, andaikan $ö_2 = 140$ dan $ö_1 = 60$. Dalam hal ini m (< ACB) =80 dan m (< ACB) = - 80 maka sudut dari t ke u adalah – 80 ; jadi ö = -160.Perhatikan bahwa – 160 = ($ö_1 + ö_2$) – 360.

Anda dapat menyakinkan diri akan kasus – kasus sebagai berikut :

Kalau $R_B, ö_2, R_A, ö_1 = R_c, ö$

a. $0 < |ö_1 + ö_2| \leq 180$ maka $ö = ö_1 + ö_2$

b. $ö_1 + ö_2 > 180$, maka $ö = (ö_1 + ö_2) - 360$.

c. $ö_1 + ö_2 < -180$, maka $ö = (ö_1 + ö_2) + 360$.

d. $ö_1 + ö_2 = 0$, maka hasilkali rotasi itu adalah suatu translasi.

Contoh 2

Diketahui titik A, B dan A ≠ B. Tentukan C dan ö jika $R_{C,ö} = R_{B,ö2}.R_{A,ö1}$ dimana $ö_1 = 30, ö_2 = 135$

Jawab :

Jumlah dari ö = 30 +135

= 165

Berarti 165 ≤ 180 maka akan menggunakan kasus yang pertama yaitu

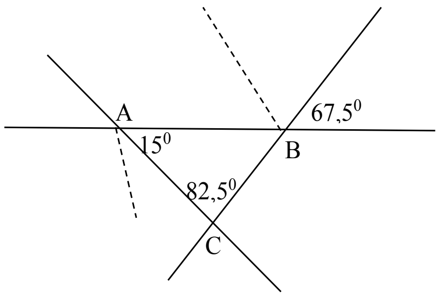
$0 < |ö_1 + ö_2| \leq 180$ maka $ö = ö_1 + ö_2$

Artinya ö = 30 +135

= 165

Jadi $R_{C,165}$

Untuk menentukan C maka perlu dilukis terlebih dahulu



E. Tugas Kelompok

1. Diketahui titik A, B, dan B'.Lukislah dua garis s dan t $M_sM_1 = R_{A,\varnothing}$.
2. Diketahui titik – titik A dan P yang berbeda. Lukislah $R_{A,-75}(P)$ dan $R_{A,-120}(P)$

F. Tes Formatif

1. Jika A titik asal sebuah sistem koordinat orthogonal dan s = {(x,y)|y = 2x-3 } tentukan s' = $R_{A,90^0}$ (s)
2. Diketahui titik A, B dan A ≠ B. Tentukan C dan ö jika $R_{C,ö} = R_{B,ö2}.R_{A,ö1}$ dimana $ö_1 = -90, ö_2 = 150$
3. Diketahui △ABC dengan m (∠CAB) = ½α , m (∠ABC) = ½β , m (∠BCA) = ½ γ . Andaikan T = $R_{C,\gamma}$. $R_{B,\beta}$.$R_{B,\alpha}$.
   a. Tentukan T (A)
   b. Buktikan T adalah transformasi identitas

G. Tindak Lanjut

Buatlah catatan individu berkaitan dengan materi yang dipelajari dalam bab ini menggunakan bahasa sendiri

H. Daftar Pustaka

Eccles, Frank M. 1971. *An Introduction to Transformational Geometry Addison*. Wesley Publishing Company, Reading Massachusets.

Herstein, I.N. 1975. *Topics in Algebra*. New York: John Wiley & Sons.

Martin, George E. 1982. *Transformation Geometry*. New York: Springer-Verlag.

______________. 1975. The *Foundations of Geometry and The Non-Euclidean Plane*. New York: Springer-Verlag.

Rawuh. 1994. *Geometri Transformasi*. Semarang: Universitas Negeri Semarang

Susanta, B. 1990. *Geometri Transformasi*. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.

Yaglom, I.M. 1962. *Geometric Transformations I*. New York: Random House.