ALJABAR LINIER BERBANTUAN WOLFRAM MATHEMATICA

Dr. Aryo Andri Nugroho, S.Si., M.Pd
Lukman Harun, S.Pd., M.Pd
Noviana Dini Rahmawati, S.Pd., M.Pd

Yoga Pratama

ISBN : 978-602-0896-40-3

ALJABAR LINIER
berbantuan
WOLFRAM MATHEMATICA

Dr. Aryo Andri Nugroho, S.Si., M.Pd
Lukman Harun, S.Pd., M.Pd
Noviana Dini Rahmawati, S.Pd., M.Pd

Yoga Pratama

Dr. Aryo Andri Nugroho, S.Si., M.Pd
Lukman Harun, S.Pd., M.Pd
Noviana Dini Rahmawati, S.Pd., M.Pd

ALJABAR LINIER
berbantuan WOLFRAM MATHEMATICA

ISBN : 978-602-0896-40-3
Penerbit Yoga Pratama
Jl. Puspowarno Selatan No. 53 Semarang 50143 Telp. 024-7625016, 7615670
Fax. 024-7625016
e-mail : yogapratama_014@yahoo.co.id

vi, 59 hal, 160 X 240 mm
Lay-out / Setting : Progress
Desain Cover : Progress

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji dan syukur kami panjatkan kepada Allah SWT atas segala nikmat yang telah dicurahkanNYA. Salah satu curahan nikmat tersebut adalah telah selesainya penyusunan bahan ajar **ALJABAR LINIER BERBANTUAN *WOLFRAM MATHEMATICA*.**

Bahan ajar **ALJABAR LINIER BERBANTUAN *WOLFRAM MATHEMATICA*** ini merupakan bahan ajar sebagai panduan bagi yang ingin mengenal dan mempelajari matakuliah Aljabar Linier dengan pemakaian software *Wolfram Mathematica*. Sesuai namanya, *Wolfram Mathematica* merupakan salah satu software aplikasi yang sangat handal untuk menyelesaikan beragam masalah matematika secara terintegrasi dengan sintak program yang sederhana.

Akhirnya jika dalam bahan ajar ini terdapat banyak kekurangan, penulis dengan senang hati menerima masukan dan saran para pembaca untuk perbaikan di masa depan.

Semarang, Januari 2020

Penulis

DAFTAR ISI

BAB 1
SEKILAS MATHEMATICA

A. Pendahuluan

Mathematica merupakan software aplikasi buatan *wolfram research* yang sangat handal dengan fasilitas terintegrasi lengkap untuk menyelesaikan beragam masalah matematika. *Mathematica* memiliki fasilitas fungsi matematik terpasang lebih dari 750 buah yang menjadikan sintak programnya dapat dinyatakan dalam satu atau beberapa baris sederhana saja. Mathematica pertama kali diperkenalkan pada tahun 1988 dan memberi pengaruh yang mendalam pada perkembangan pemakaian komputer di bidang matematika, teknik dan rekayasa.

Komputasi matematika pada dasarnya diklasifikasikan dalam tiga kelas utama, yaitu komputasi numerik, komputasi simbolik dan visualisasi grafik. *Mathematica* menyediakan fasilitas lengkap untuk melaksanakan semua komputasi matematika tersebut dalam suatu lingkungan kerja yang terintegrasi. Dengan lingkungan kerja yang demikian maka kita dapat melaksanakan beragam perhitungan matematika, seperti perhitungan aritmatika, perhitungan aljabar, perhitungan dan operasi simbolik dalam aljabar matriks, aljabar linear, linear programing, metode numerik, teori bilangan, matematika diskrit, kalkulus, transformasi laplace, statistika, geometri, pemodelan matematika dan lain-lain.

Sistem kerja *mathematica* terdiri dari dua bagian utama, yaitu *front end* dan *kernel*. *front end* merupakan antarmuka *(interface)* dalam bentuk lembar kerja yang disebut *notebook*. Para pemakai memasukkan perintah-perintah atau melakukan perhitungan dan pengolahan data pada bagian *front end* (*notebook*/lembar kerja) ini sedangkan komputasi matematika dilakukan pada bagian *kernel* dan hasil komputasinya ditampilkan kembali pada bagian *front end* (lembar kerja yang tampak pada monitor).

B. Kemampuan *Mathematica*

Kemampuan dan keunggulan *Mathematica* diantaranya adalah sebagai berikut.

1. Mampu melakukan perhitungan aritmatika yang mengandung lebih dari seratus ribu digit
2. Mampu menguraikan polinomial kedalam ratusan ribu suku-sukunya
3. Mampu memfaktorkan polinomial tiga variabel ke dalam ratusan faktor
4. Mampu membangkitkan jutaan bilangan prima yang dimulai dari angka 2
5. Mampu menghitung inversi matriks integer berukuran 200 x 200
6. Mampu menghitung determinan matriks integer berukuran 150 x 150
7. Mampu menghitung determinan matriks simbolik berukuran 8 x 8
8. Mampu menggambarkan beragam jenis grafik dimensi dua dan dimensi tiga
9. Mampu melakukan pengurutan *(sorting)* terhadap jutaan elemen data.
10. Mampu melaksanakan seluruh perhitungan aljabar, kalkulus, matematika diskrit, statistika dengan mudah dan ringkas dengan menggunakan fasilitas fungsi-fungsi terpasang sehingga menjadikan *Mathematica* sebagai perangkat lunak yang terintegrasi sempurna untuk solusi kasus matematika.

C. Fungsi dalam toolbar *Mathematica*

Terdapat banyak fungsi dalam toolbar *Mathematica*, tapi yang akan diterangkan dibawah ini adalah dianggap penting dalam menulis atau yang kelihatannya berbeda dengan software matematika yang lain.

1. Palletes

Palletes adalah alat bantu editor untuk persamaan. Penggunaan notasi pada palletes bisa digunakan untuk teks dan input. Palletes dapat dikeluarkan dengan cara seperti berikut.

a. klik File

b. sorot Palletes

c. masuk pada bagian kanan.

d. pilih palletes yang diinginkan dan klik.

2. Format

Format yang ada dalam toolbar memungkinkan pengguna *Mathematica* memiliki default yang biasa digunakan dalam penulisan standar matematika. Fungsi-fungsi yang ada dalam format seperti *Style Sheet* dan *Style* memiliki librari yang biasa digunakan oleh matematikawan dalam menuliskan artikel, presentasi, atau mengajar. Contoh untuk worksheet ini yang digunakan adalah seperti berikut.

a. Style Sheet : TutorialBook

b. Style yang digunakan antara lain:

- Title
- Section
- Subsection
- Text
- Input
- dll

Apa fungsi dalam toolbar yang akan digunakan sangat terkait dengan kebutuhan dan pilihan pengguna pada saat memakai *Mathematica* ini.

3. **Help Browser**

   Untuk menunjang pemakaian sebuah software, biasanya software tersebut dilengkapi dengan *help* dan manual *online*. Untuk software *Mathematica,* beberapa hal yang dapat dikatakan sebagai keunggulan adalah:

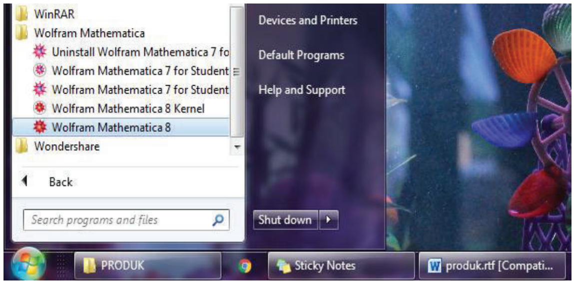
   a. Manual penggunaan *Mathematica* dapat didownload di *Information Center on Web* yang terdapat dalam *toolbar Help*
   b. Dedikasi yang sangat tinggi dari pencipta *Mathematica* yakni Stephen Wolfram untuk mengembangkan ilmu pengetahuan dengan mengembangkan *Wolfram Research Center* yang juga dapat dilihat di *Wolfram Research on Web*

   Help yang digunakan, hal yang sama dapat dijumpai pada kebanyakan software matematika, sangat menunjang dan memuat banyak contoh sehingga memungkinkan pengguna belajar dengan cepat.

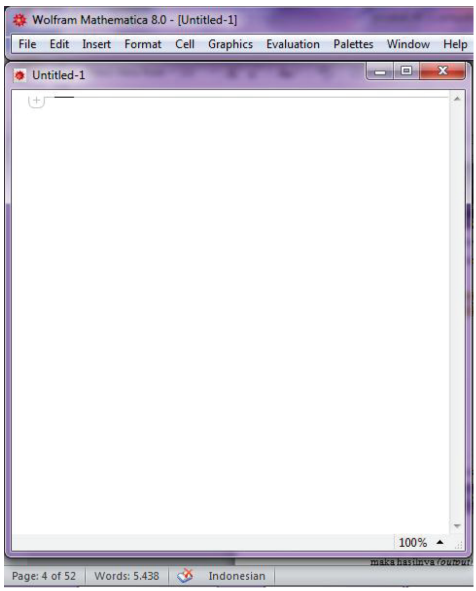
D. Memulai *Mathematica*

Bilamana *Mathematica* sudah diinstalasi pada komputer maka kita dapat mulai mengoperasikannya dengan cara seperti berikut.

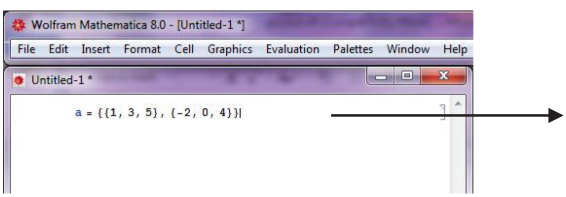
1. Dobel klik ikon *Mathematica* (jika ada) pada layar monitor anda atau pilih start → program → M*athematica*



2. Setelah program *Mathematica* diaktifkan, tampilan pertama yang muncul di layar monitor adalah lembar kerja *Untitled-1* (*notebook)* seperti gambar 1 berikut.

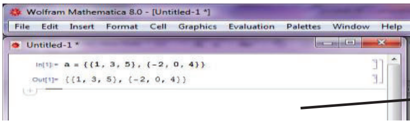


3. Jika kita telah memasukkan perintah (*input*),



Input / Perintah

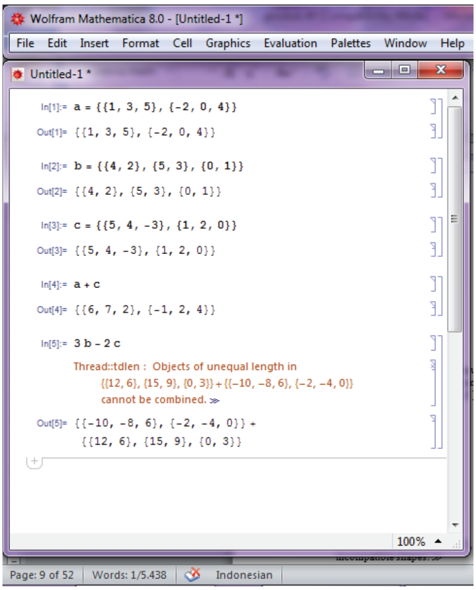
maka hasilnya *(output)* dapat ditampilkan dengan menekan tombol **“Shift + Enter”**

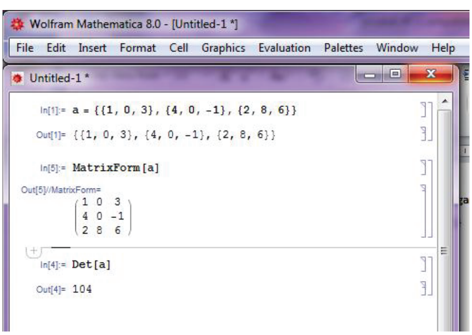


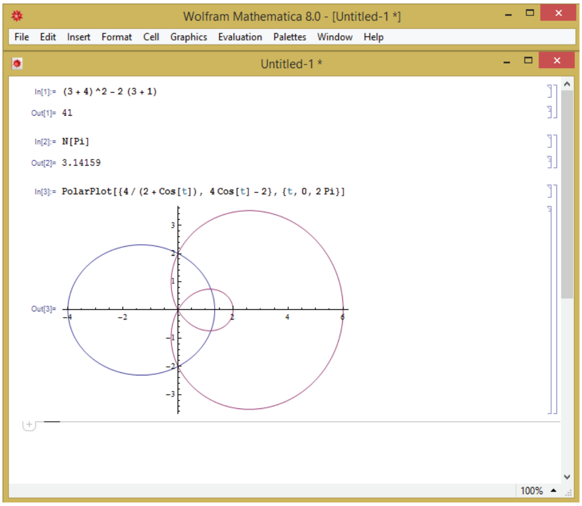
Input / Perintah

Output / Hasil

4. Berikut beberapa contoh perhitungan matematika dan grafik yang kita kerjakan pada lembar kerja *(notebook) Mathematica*






Wolfram Mathematica 8.0 - [Untitled-1 *]
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
Untitled-1 *
In[1]:= (3 + 4) ^2 - 2 (3 + 1)
Out[1]= 41
In[2]:= N[Pi]
Out[2]= 3.14159
In[3]:= PolarPlot[{4 / (2 + Cos[t]), 4 Cos[t] - 2}, {t, 0, 2 Pi}]
Out[3]=
100%

BAB 2
MATRIKS

Matriks adalah susunan segiempat siku-siku dari bilangan menurut baris dan kolom. Bilangan-bilangan dalam matriks dinamakan entry (elemen). Ukuran matriks dinyatakan oleh banyaknya baris dan kolom.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & a_{2j} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & a_{3j} \\ . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & . & a_{ij} \end{bmatrix}.$$

dengan, i = menyatakan banyaknya baris

j = menyatakan banyaknya kolom

A. OPERASI MATRIKS

Suatu matriks yang ukuran baris dan kolomnya sama (n) dinamakan matriks kuadrat berorde n, dan elemen-elemen seperti $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_{ij}$ disebut diagonal utama.

Adapun operasi-operasi pada matriks adalah sebagai berikut:

1. Dua matriks A dan B dapat dijumlahkan bila keduanya mempunyai ukuran yang sama dan hasilnya adalah dengan menjumlahkan masing-masing elemen yang bersesuaian.
2. Perkalian antara suatu skalar k dengan suatu matriks A adalah suatu matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing elemen dengan skalar tersebut.
3. Jika matriks A berukuran (mxr) dan Matriks B berukuran (rxn) maka hasil kali A dan B berukuran (mxn).

4. Transpose suatu matriks $A_{(mxn)}$ adalah $A^t{}_{(nxm)}$ yaitu dengan mengganti baris ke-i pada matriks A menjadi kolom ke-i pada matriks A^t.

Contoh 2.1 :

Diketahui : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Tentukan :

a). $A + C$ d). AC^t

b). $3B - 2C$ e). $AC - 2B^t$

c). $AB - 2CB$ f). $CB - 2A^t$

J a w a b **:**

a). $A + C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

b).

$$3B - 2C = 3\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 15 & 9 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 8 & -6 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= tak\ \ terdefinis\, i$$

c).

$$AB-2CB=\begin{bmatrix}1&3&5\\-2&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&2\\5&3\\0&1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}5&4&-3\\1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&2\\5&3\\0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}19&16\\-8&0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}40&19\\14&8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}19-80&16-38\\-8-28&0-16\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-61&-22\\-36&-16\end{bmatrix}$$

d).

$$AC^t=\begin{bmatrix}1&3&5\\-2&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1\\4&2\\-3&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&7\\-22&-2\end{bmatrix}$$

e).$AC-2B^t=\begin{bmatrix}1&3&5\\-2&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&4&-3\\1&2&0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}4&5&0\\2&3&1\end{bmatrix}=$

$Tak\ terdefinisi$

f). $CB-2A^t=\begin{bmatrix}5&4&-3\\1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&2\\5&3\\0&1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&-2\\3&0\\5&4\end{bmatrix}=$

$Tak\ terdefinisi$

Pemecahan masalah dengan Wolfram Mathematica:

$a=\{\{1,3,5\},\{-2,0,4\}\}$ $(shift+enter)$

$\{\{1,3,5\},\{-2,0,4\}\}$

$b=\{\{4,2\},\{5,3\},\{0,1\}\}$ $(shift+enter)$

$\{\{4,2\},\{5,3\},\{0,1\}\}$

$c=\{\{5,4,-3\},\{1,2,0\}\}$ $(shift+enter)$

$\{\{5,4,-3\},\{1,2,0\}\}$

a. $a+c$ $(shift+enter)$

$\{\{6,7,2\},\{-1,2,4\}\}$

b. 3b-2c $(shift+enter)$

Thread::tdlen: Objects of unequal length in _{{12,6},{15,9},{0,3}}+{{-10,-8,6},{-2,-4,0}}_ cannot be combined. =

{{-10,-8,6},{-2,-4,0}}+{{12,6},{15,9},{0,3}}

c. $a.\,b$-2$c.b$ $(shift+enter)$

{{-61,-22},{-36,-16}}

d. $a.Transpose[c]$ $(shift+enter)$

{{2,7},{-22,-2}}

e. $a.c$-2Transpose[b] $(shift+enter)$

Dot::dotsh: Tensors _{{1,3,5},{-2,0,4}}_ and _{{5,4,-3},{1,2,0}}_ have incompatible shapes. =

{-8+{{1,3,5},{-2,0,4}}.{{5,4,-3},{1,2,0}},-10+{{1,3,5},{-2,0,4}}.{{5,4,-3},{1,2,0}},{{1,3,5},{-2,0,4}}.{{5,4,-3},{1,2,0}}},{-4+{{1,3,5},{-2,0,4}}.{{5,4,-3},{1,2,0}},-6+{{1,3,5},{-2,0,4}}.{{5,4,-3},{1,2,0}},-2+{{1,3,5},{-2,0,4}}.{{5,4,-3},{1,2,0}}}}

f. $c.b$-2Transpose[a] $(shift+enter)$

Thread::tdlen: Objects of unequal length in _{{40,19},{14,8}}+{{-2,4},{-6,0},{-10,-8}}_ cannot be combined. =

{{40,19},{14,8}}+{{-2,4},{-6,0},{-10,-8}}

Beberapa pengertian tentang matriks :

1. Suatu matriks yang semua elemennya nol disebut matriks nol, yaitu :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Suatu matriks kuadrat yang semua diagonal utamanya satu dan lainnya nol disebut matriks satuan, yaitu $I_{(2x2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Jika ada suatu matriks A dan B sedemikian sehingga $AB = BA = I$ maka A dikatakan dapat dibalik (*Invertible*) dan B dikatakan invers dari A. Hal ini dapat ditulis $A^{-1} = B$ atau sebaliknya.

4. Invers suatu matriks adalah tunggal.

5. Jika A dan B adalah matriks-matriks yang dapat dibalik dan berukuran sama maka :
   a. $A + B$ juga dapat dibalik
   b. $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
   c. $A^{-n} = (A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$
   d. $(A^{-1})^{-1} = A$
   e. $(kA)^{-1} = 1/k\ A^{-1}$, k skalar tak nol.

Contoh 2.2 :

Buktikan $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ adalah invers dari $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Pemecahan masalah dengan Wolfram Mathematica:

a = {{2,-5},{-1,3}} $(shift + enter)$

{{2,-5},{-1,3}}

Inverse[a] $(shift + enter)$

{{3,5},{1,2}}

B u k t i :

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 + 5.(-1) & 3.(-5) + 5.3 \\ 1.2 + 2.(-1) & 1.(-5) + 2.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3 + (-5).1 & 2.5 + (-5).2 \\ -1.3 + 3.1 & -1.(5) + 3.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi $AB = BA = I$ (terbukti, bahwa B merupakan matriks invers A)

B. JENIS MATRIKS

1. Matriks bujursangkar

   adalah matriks dengan jumlah baris = jumlah kolom, sehingga disebut berordo n.

   Barisan elemen $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$ disebut diagonal utama dari matrik bujursangkar A

   Contoh: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

2. Matriks nol

   adalah matriks yang semua elemennya adalah 0

   Contoh: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. Matriks diagonal

   adalah matriks bujursangkar yang semua elemen di luar diagonal utamanya 0.

   Contoh: $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$

4. Matriks identitas (matriks satuan)

   adalah matriks diagonal yang elemen – elemen diagonal utama adalah 1.

   Contoh: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Matriks skalar

   adalah matriks diagonal dengan semua elemen diagonal utamanya = *k*

   Contoh: $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ dengan k = 4

6. Matriks segitiga bawah (*lower triangular*)

   adalah matriks bujursangkar yang semua elemen di atas diagonal utama = 0.

   Contoh: $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

7. Matriks segitiga atas (*upper triangular*)

   adalah matriks bujursangkar yang semua elemen di bawah diagonal utama = 0.

   Contoh: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$

8. Matriks simetris

   adalah matriks yang transposenya sama dengan dirinya sendiri.

   Contoh: $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

C. SIFAT-SIFAT OPERASI MATRIKS

1. $A + B = B + A \quad (sifat\ komutatif)$
2. $(A + B) + C = A + (B + C) \quad (sifat\ asosiatif)$
3. $A + 0 = 0 + A = A \quad (sifat\ identitas\ penjumlahan)$
4. $A + (-A) = -A + A = 0 \quad (sifat\ negatif\ matriks)$
5. $k(A + B) = kA +$

   $kB \quad (sifat\ distributif\ terhadap\ skalar\ k)$

6. $(k+l)A = kA + lA \quad (sifat\ distributif\ terhadap\ skalar\ k\ dan\ l)$
7. $(kl)A = k(lA) \quad (sifat\ asosiatif\ terhadap\ perkalian\ skalar)$
8. $1A = A \quad (sifat\ identitas\ perkalian)$

D. MATRIKS ELEMENTER

Suatu matriks *A* dikatakan matriks elementer jika matriks tersebut diperoleh dari matriks satuan $I_{(nxn)}$ yaitu dengan melakukan OBE tunggal . Setiap matriks elementer dapat dibalik dan inversnya juga merupakan matriks elementer. Dua matriks *A* dan *B* dikatakan ekivalen *(A~B)* apabila salah satunya dapat diperoleh dari yang lain dengan transformasi – transformasi elementer terhadap baris dan atau kolom. Jika transformasi elementernya pada baris saja, maka dikatakan ekivalen baris. Begitu juga dengan kolom.

Contoh 2.3 :

1. Jika $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

   A dikatakan matriks elementer karena baris ke-2 matriks *A* diperoleh dari hasil kali (-3) dengan baris ke-2 matriks I_2.

2. Jika $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *maka*

   B merupakan matriks elementer karena baris ke-1 matriks *B* diperoleh dari hasil kali (3) dengan baris ke-3 matriks I_3 yang kemudian ditambahkan pada baris ke-1 matriks I_3.

Jika matriks elementer *E* adalah hasil dari OBE tertentu pada $I_{(mxm)}$ kemudian ada matriks $A_{(mxn)}$ maka hasil kali *E.A*= hasil OBE yang sama terhadap *A*.

Contoh 2.4 :

Buktikan $EA = A$, jika E suatu matriks elementer hasil dari OBE tertentu pada matriks I_3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

J a w a b :

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; B_3 + 3(B_1)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ merupakan matriks elementer } (E)$$

$$\text{Jadi } EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} 1.1+0.2+0.1 & 1.0+0.-1+0.4 & 1.2+0.3+0.4 & 1.3+0.6+0.0 \\ 0.1+1.2+0.1 & 0.0+1.-1+0.4 & 0.2+1.3+0.4 & 0.3+1.6+0.0 \\ 3.1+0.1+1.1 & 3.0+0.-1+1.4 & 3.2+0.3+1.4 & 3.3+0.6+1.0 \end{bmatrix}$$

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

Matriks A dilakukan OBE diperoleh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \; B_3 + 3B_1 \text{ menjadi } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

Jadi $EA = A$ (terbukti)

Misalkan $A_{(nxn)} \sim I_{(nxn)}$ sehingga dapat direduksi pada $I_{(nxn)}$ dengan urutan berhingga dari operasi-operasi (OBE) yaitu :

$E_k . E_{k-1}. E_{k-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. E_3.E_2.E_1.A = I_{(nxn)}$

……….(1)

Sehingga :

$$E_k^{-1}.E_k.E_{k-1}.E_{k-2}.................................E_3.E_2.E_1.A = E_k^{-1}I_{(nxn)}$$

$$E_{k-1}.E_{k-2}...E_3.E_2.E_1.A = E_k^{-1}.I_n$$

$$E_{k-1}^{-1}.E_{k-1}.E_{k-2}....................................E_3.E_2.E_1.A = E_{k-1}^{-1}.E_k^{-1}.I_n$$

$$E_{k-2}.E_{k-3}..E_3.E_2.E_1.A = E_{k-1}^{-1}.E_k^{-1}.I_n$$

dan seterusnya maka akan diperoleh :

$$A = E_1^{-1}.E_2^{-1}.E_3^{-1}.................................E_{k-1}^{1}.E_k^{-1}.I_n$$

Oleh karena itu :

$$(A)^{-1} = \left(E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots.. E_{k-1}^{-1}E_k^{-1}I_n\right)^{-1}$$

$$(A)^{-1} = (I_n)^{-1}\left(E_k^{-1}\right)^{-1}\left(E_{k-1}^{-1}\right)^{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left(E_3^{-1}\right)^{-1}\left(E_2^{-1}\right)^{-1}\left(E_1^{-1}\right)^{-1}$$

$$A^{-1} = E_k E_{k-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. E_3E_2E_1I_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) artinya urutan operasi baris tereduksi matriks A terhadap I_n akan mereduksi I_n pada A^{-1}. Dengan perkataan lain bahwa untuk mencari invers matriks A yang dapat dibalik maka kita harus mencari urutan OBE tereduksi A pada matriks satuan I dan kemudian melakukan urutan operasi yang sama ini pada I untuk mendapatkan A^{-1}.

Jadi jika dibuat skema : $[A \,\vdots\, I] \rightarrow [I \,\vdots\, A^{-1}]$

Contoh 2.5 :

Cari Invers $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

J a w a b :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} B_2 + (-2)B_1 \\ B_3 + (-2)B_1 \end{array}$$

menjadi $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} B_1 + (-2)B_2 \\ B_3 + 2B_2 \end{array}$

menjadi $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} B_1 + 9B_3 \\ B_2 + (-3)B_3 \end{array}$

menjadi $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] B_3(-1)$

menjadi $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$

Jadi invers matriks A adalah $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Pemecahan masalah dengan Wolfram Mathematica:

a ={{1,2,3},{2,5,3},{1,0,8}} $(shift + enter)$

{{1,2,3},{2,5,3},{1,0,8}}

Inverse[a] $(shift + enter)$

{{-40,16,9},{13,-5,-3},{5,-2,-1}}

LATIHAN SOAL:

1. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

   skalar $k = -3 \qquad l = 2$

   Buktikan bahwa:

   a. $a(B - C) = aB - aC$

   b. $A + (B + C) = (A + B) + C$

   c. $(aC)^t = aC^t$

   d. $(A + B)^t = A^t + B^t$

2. Carilah invers matriks berikut ini jika matriks tersebut dapat dibalik.

   a. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

   b. $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

BAB 3
DETERMINAN

A. FUNGSI DETERMINAN

Permutasi himpunan bilangan-bilangan bulat *{1, 2, 3,…,n}* adalah susunan bilangan - bilangan bulat tersebut menurut aturan tertentu tanpa mengulangi bilangan-bilangan tersebut.

Contoh 3.1 :

Tentukan permutasi dari bilangan-bilangan bulat *{1, 2, 3}*

J a w a b :

$$\{1, 2, 3\} \Rightarrow \begin{array}{cccc} I & II & III & \\ 1 & 2 & 3 & \{1,2,3\} \\ & 3 & 2 & \{1,3,2\} \\ 2 & 1 & 3 & \{2,1,3\} \\ & 3 & 1 & \{2,3,1\} \\ 3 & 1 & 2 & \{3,1,2\} \\ & 2 & 1 & \{3,2,1\} \end{array}$$

Jadi permutasinya adalah 6

atau dengan rumus umum permutasi : $p_r^n = \dfrac{n!}{(n-r)!} = \dfrac{3!}{0!} = 3.2.1 = 6$

Pemecahan masalah dengan Wolfram Mathematica:

Permutations[{1,2,3}] $(shift + enter)$

{{1,2,3}, {1,3,2}, {2,1,3}, {2,3,1}, {3,1,2}, {3,2,1}}

Secara umum banyaknya permutasi dari himpunan bilangan-bilangan { 1, 2, 3, ………, *n* } yang diambil secara keseluruhan adalah *n!*.

Jika $(p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots\ldots, p_n)$ adalah suatu permutasi maka invers permutasi tersebut adalah sebuah bilangan bulat yang lebih besar mendahului sebuah bilangan bulat yang lebih kecil. Jika jumlah invers seluruhnya genap maka permutasi tersebut dinamakan permutasi genap. Jika jumlah invers seluruhnya ganjil maka permutasi tersebut dinamakan permutasi ganjil.

Contoh 3.2 :

Tentukan nama permutasi dari himpunan bilangan-bilangan bulat { 1, 2, 3 }.

J a w a b :

Permutasi dari { 1, 2, 3 } adalah 6, yaitu :

	Permutasi	**Invers**	**Nama**
1.	(1, 2, 3)	0	Permutasi genap
2.	(1, 3, 2)	1	Permutasi ganjil
3.	(2, 1, 3)	1	Permutasi ganjil
4.	(2, 3, 1)	2	Permutasi genap
5.	(3, 1, 2)	2	Permutasi genap
6.	(3, 2, 1)	3	Permutasi ganjil

Hasil kali elementer A adalah hasil kali elemen-elemen matriks A, dimana dua diantara faktor-faktor tersebut tidak boleh berasal dari baris dan kolom yang sama.

Contoh 3.3 :

Daftarkanlah semua hasil kali elementer matriks berikut :

a). $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ b). $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

a). Karena matriks A berukuran *(2x2)* maka hasil kali elementernya terdiri atas dua (2) faktor dan kedua faktor tersebut harus berasal dari baris dan kolom yang berbeda.

Adapun hasil kali elementer tersebut adalah :

1. a_{11} dengan a_{22} yaitu $a_{11}\, a_{22}$
2. a_{12} dengan a_{21} yaitu $a_{12}\, a_{21}$
3. a_{21} dengan a_{12} yaitu $a_{21}\, a_{12}$ (sama dengan no. 2)
4. a_{22} dengan a_{11} yaitu $a_{22}\, a_{11}$ (sama dengan no. 1)

Jadi hasil kali elementer matriks *A* adalah $a_{11}\, a_{22}$ dan $a_{12}.a_{21}$

b). Karena matriks *B* berukuran (*3x3*) maka hasil kali elementernya terdiri atas 3 faktor yaitu :

1. a_{11}, a_{22}, a_{33}
2. a_{12}, a_{21}, a_{32}
3. a_{13}, a_{21}, a_{32}
4. a_{21}, a_{12}, a_{33} (sama dengan no. 2)
5. a_{22}, a_{11}, a_{33} (sama dengan no. 1)

6 a_{23}, a_{12}, a_{31}

7. a_{31}, a_{22}, a_{13}
8. a_{32}, a_{21}, a_{13} (sama dengan no. 3)
9. a_{33}, a_{22}, a_{11} (sama dengan no. 1)

dst

Dan elemen matriknya ada 6 yaitu :

1. $a_{11}\quad a_{22}\quad a_{33}$	4. $a_{12}\quad a_{23}\quad a_{31}$
2. $a_{11}\quad a_{23}\quad a_{32}$	5. $a_{13}\quad a_{21}\quad a_{32}$
3. $a_{12}\quad a_{21}\quad a_{33}$	6. $a_{13}\quad a_{22}\quad a_{31}$

Secara umum suatu matriks yang berukuran (*nxn*) akan mempunyai (*n*!) hasil kali elementer.

Dari kedua contoh di atas, karena faktor-faktor harus berasal dari baris dan kolom yang berbeda maka jika nomor baris sudah kita tentukan, nomor kolomnya adalah merupakan permutasi himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n\}$ sesuai dengan ukuran matriks tersebut. Hasil kali elementer bertanda dari matriks A adalah hasil kali elementer matriks A dan bertanda positif jika permutasi nomor kolomnya genap serta bertanda negatif jika permutasi nomor kolomnya ganjil.

Contoh 3.4 :

Dafarkanlah semua hasil kali elementer bertanda dari matriks-matriks nomor a). dan b). di atas.

J a w a b :

a).

Hasil kali elementer	**Permutasi kolom**	**Jumlah Invers**	**Nama Permutasi**	**Hasil kali elementer bertanda**
$a_{11} \, . \, a_{22}$	(1, 2)	0	Genap	$+ a_{11} \, . \, a_{22}$
$a_{12} \, . \, a_{21}$	(2, 1)	1	ganjil	$- a_{12} \, . \, a_{21}$

b).

Hasil kali elementer	**Permutasi kolom**	**Jumlah Invers**	**Nama Permutasi**	**Hasil kali elementer bertanda**
$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$	(1, 2, 3)	0	Genap	$+ a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$
$a_{11}\ a_{23}$	(1, 3, 2)	1	Ganjil	$- a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$

a_{32}				
$a_{12}\ a_{21}$ a_{33}	(2, 1, 3)	1	Ganjil	- $a_{12}\ a_{21}\ a_{33}$
$a_{12}\ a_{23}.$ a_{31}	(2, 3, 1)	2	Genap	+ $a_{12}\ a_{23}$ a_{31}
$a_{13}\ a_{21}$ a_{32}	(3, 1, 2)	2	Genap	+ $a_{13}\ a_{21}$ a_{32}
$a_{13}\ a_{22}$ a_{31}	(3, 2, 1)	3	Ganjil	- $a_{13}\ a_{22}\ a_{31}$

Determinan A yang biasa ditulis dengan *det (A)* adalah jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari suatu matriks A.

Contoh 3.5 :

Tentukan determinan matriks berikut :

a). $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ b). $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

J a w a b :

a. $det\ (A) = (+\ a_{11}\ a_{22}) + (-\ a_{21}\ a_{12})$

b. $det\ (B) = a_{11}\ a_{22}\ a_{33} + a_{12}\ a_{23}\ a_{31} + a_{13}\ a_{21}\ a_{32} + (-a_{13}\ a_{22}\ a_{31})$
$+ (-a_{11}\ a_{23}\ a_{22}) +$
$(-a_{12}\ a_{21}\ a_{33})$

Pemecahan masalah dengan Wolfram Mathematica:

A = {{a11,a12},{a21,a22}} $(shift + enter)$

{{a11,a12},{a21,a22}}

B = {{a11,a12,a13},{a21,a22,a23},{a31,a32,a33}} $(shift + enter)$

{a11,a12,a13},{a21,a22,a23},{a31,a32,a33}}

MatrixForm[A] $(shift + enter)$

$$\begin{pmatrix} \text{a11} & \text{a12} \\ \text{a21} & \text{a22} \end{pmatrix}$$

MatrixForm[B] $(shift + enter)$

$$\begin{pmatrix} \text{a11} & \text{a12} & \text{a13} \\ \text{a21} & \text{a22} & \text{a23} \\ \text{a31} & \text{a32} & \text{a33} \end{pmatrix}$$

Det[A] $(shift + enter)$

$-\text{a12a21} + \text{a11a22}$

$Det[B]$ $(shift + enter)$

$$-\text{a13a22a31} + \text{a12a23a31} + \text{a13a21a32} - \text{a11a23a32} - \text{a12a21a33} + \text{a11a22a33}$$

Contoh 3.6 :

Tentukan determinan matriks berikut :

a). $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ b). $B = \begin{bmatrix} k & -3 & 9 \\ 2 & 4 & k+1 \\ 1 & k^2 & 3 \end{bmatrix}$

J a w a b :

a). det (A) = (1.0.6 + 0.-1.2 + 3.4.8) – (2.0.3 + 8.-1.1 + 6.4.0)

= (0 + 0 + 96) – (0 – 8 + 0)

= 96 + 8

= 104

b). det (B) $= (k.4.3 + (-3)(k+1).1+ 9.2.k^2) – (1.4. 9 + k^2.(k+1).k + 3.2. (-3))$

$= (12k – 3k – 3 + 18k^2) – (36 + k^4 +k^3 – 18)$

$= -k^4 – k^3 + 18k^2 + 9k – 21.$

***Pemecahan* masalah dengan *Wolfram Mathematica*:**

A = {{1,0,3},{4,0,-1},{2,8,6}} $(shift + enter)$

{{1,0,3},{4,0,-1},{2,8,6}}

MatrixForm[A] $(shift + enter)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Det [A] $(shift + enter)$

104

B = {{k,-3,9},{2,4,k+1},{1,k^2,3}} $(shift + enter)$

{{k,-3,9},{2,4,1+k},{1,k^2,3}}

$MatrixForm[B]$ $(shift + enter)$

$$\begin{pmatrix} k & -3 & 9 \\ 2 & 4 & 1+k \\ 1 & k^2 & 3 \end{pmatrix}$$

Det[B] $(shift + enter)$

$-21+9\ k+18\ k^2-k^3-k^4$

B. MENGHITUNG DETERMINAN DENGAN REDUKSI BARIS

Untuk melakukan perhitungan determinan, perhatikan langkah-langkah berikut :

1. Jika A adalah suatu matriks kuadrat yang mengandung sebaris elemen nol maka det (A) = 0.

2. Jika A adalah matriks segitiga yang berukuran (nxn) maka det (A) = $a_{11}. a_{22}. a_{33}...a_{nn}$ (elemen diagonal utama).
3. Jika B adalah suatu matriks yang dihasilkan bila salah satu baris matriks A dikalikan dengan konstanta k maka det (B) = k. det (A).
4. Jika B adalah matriks yang dihasilkan bila dua baris pada matriks A dipertukarkan maka det (B) = - det (A).
5. Jika B adalah suatu matriks yang dihasilkan bila salah satu baris pada matriks A ditambah dengan (k) kali baris lainnya maka det (B) = det (A).

Contoh 3.7 :

Hitung determinan matriks berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -40 & 17 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & -120 & 51 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 11 \\ 2 & -40 & 17 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & -40 & 17 \\ 0 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

J a w a b :

det (A) = 2 . 1. 3 = 6

det (B) = k . det (A) = 3 . 6 = 18

det (C) = - det (A) = -6

det (D) = det (A) = 6

Dengan OBE maka suatu matriks dapat direduksi menjadi bentuk eselon baris. Serta, determinan matriks sebelum dan sesudah direduksi adalah sama (nol).

Contoh 3.8 :

Hitung det (A) jika : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

J a w a b :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} B2:3 \quad = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} B1 \Leftrightarrow B2$$

$$\det(A) = -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} - \textit{tambahkan } (-2) \textit{ kali baris I pada baris III}$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} - \textit{tambahkan } (-10) \textit{ kali baris II pada baris III}$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$$

$$= -3.(1.1.(-55))$$

$$= 165.$$

C. SIFAT-SIFAT DETERMINAN

1. Jika A adalah suatu matriks kuadrat maka det (A) = det (A^t).
2. Jika A suatu matriks berukuran (nxn) dan setiap baris dalam A mempunyai factor bersama sebesar k maka det (kA) = k^n det (A).
3. det (A+B) biasanya ≠ det (A) + det (B).
4. Jika A, B, C adalah matriks kuadrat yang berukuran sama dengan

   $$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a & b \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

   maka det (A) + det (B) = det (C)

   catatan : * Pada A, B, C hanya berbeda pada satu baris saja.

   * Berlaku pula untuk sembarang ukuran matriks kuadrat.
5. Jika A dan B adalah matriks kuadrat yang ukurannya sama maka det (A.B) = det (A) . det (B).
6. Suatu matriks kuadrat A dapat di balik jika dan hanya jika det (A) ≠ 0.
7. Jika matriks kuadrat A dapat dibalik maka :

   $$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

Contoh 3.9 :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & -1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Tentukan :

a. det (A) dan det (B)
b. det (C^t) dan det (D^t)

c. det (3A) dan det (5B)

d. det (A+B)

e. Apakah det (3C) = 3^2 det (C)

f. Apakah det (A+D) = det (A) + det (D)

g. Apakah det (D) = det (B) + det (C)

h. Apakah det (CD) = det (C) . det (D)

i. Tentukan det (E) dan det (F)

J a w a b :

a. det (A) = $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ = 3.2 – 2.1 = 6 – 2 =4

det (B) =$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$= 1.5 + 2.3 = 5 + 6 = 11

b. det (C^t) = $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}^t = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$=1.5 – 3.2 = 5 – 6 = -1

det (D^t) =$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}^t = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$=2.5 – 0.2 = 10 – 0 = 10

c. det (3A) = 3^2 det (A) = 9.4 = 36

det (5B) = 5^2 det (B) = 25.11 = 275

d. det (A+B) = $\begin{vmatrix} 3+1 & 1-3 \\ 2+2 & 2+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$=4.7 + 2.4 = 36

e. det (3C) = 3^2 det (C)

$$\begin{vmatrix} 3.1 & 3.3 \\ 3.2 & 3.5 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} = 9\left(1.5 - 2.3\right)$$

$$3.15 - 6.9 = 9(5 - 6)$$

$$45 - 54 = -9$$

$$-9 = -9 \quad (sama)$$

f. det (A + D) = det (A) + det (D)

$$\begin{vmatrix} 3+2 & 1+0 \\ 2+2 & 2+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = \left(3.2 - 2.1\right) + \left(2.5 - 2.0\right)$$

$$\left(5.7 - 4.1\right) = \left(6 - 2\right) + \left(10 - 0\right)$$

$$35 - 4 = 4 + 10$$

$$31 \neq 14 \ (tidak \ \ sama)$$

g. det (D) = det (B) + det (C)

10 = 11 + (-1)

10 = 10 (sama)

h. det (CD) = det (C) . det (D)

$$\left|\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right| = (-1)(10)$$

$$\begin{vmatrix} 1.2+3.2 & 1.0+3.5 \\ 2.2+5.2 & 2.0+5.5 \end{vmatrix} = -10$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 15 \\ 14 & 25 \end{vmatrix} = -10$$

$$8.25 - 14.15 = -10$$

$$200 - 210 = -10$$

$$-10 = -10 \ (sama)$$

i. $\det(E) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} - 0 + 0$

$$= 6(-1) - 8.7$$
$$= -6 - 56$$
$$= -62$$

$\det(F) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

= 0, karena kolom I dan III berkelipatan.

Pemecahan masalah dengan Wolfram Mathematica:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$Det[A]$ $\quad$ $(shift + enter)$

$\{\{3,1\},\{2,2\}\}$

4

$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$Det[B]$ $\quad$ $(shift + enter)$

$\{\{1,-3\},\{2,5\}\}$

11

$H = \{\{1,3\},\{2,5\}\}$ $\quad$ $(shift + enter)$

$\{\{1,3\},\{2,5\}\}$

Pemecahan masalah dengan Wolfram Mathematica:

$MatrixForm[H]$ $(shift + enter)$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Transpose[H] $(shift + enter)$

{{1,2},{3,5}}

Det[Transpose[H]] $(shift + enter)$

-1

D. EKSPANSI KOFAKTOR

Definisi 3.1:

Jika A adalah matriks kuadrat maka :

1. Minor entri a_{ij} adalah determinan sub matriks yang tetap setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihapus dari A, dan dinyatakan dengan M_{ij}.
2. Kofaktor entri a_{ij} adalah $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Contoh 3.10 :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Tentukan M_{12}, M_{22}, M_{31}, dan C_{12}, C_{22}, C_{31}

J a w a b :

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} = 16 - 6 = 10$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} = 24 - (-4) = 28$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = 6 - (-20) = 26$$

$$\begin{aligned} C_{12} &= (-1)^{1+2}.M_{12} \\ &= (-1)^{3}.10 \\ &= -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{31} &= (-1)^{3+1}.M_{31} \\ &= (-1)^{4}.26 \\ &= 26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{22} &= (-1)^{2+2}.M_{22} \\ &= (-1)^{4}.28 \\ &= 28 \end{aligned}$$

Determinan matriks A yang berukuran n x n dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri dalam suatu baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya dan menambah hasil kali-hasil kali yang diperolehnya.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2j} \\ . & . & . & . & . \; . \\ . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & a_{ij} \end{bmatrix}$$

det (A) = $a_{ij}\ c_{ij} + a_{2j}\ c_{2j} + a_{3j}\ c_{3j} + ... + a_{nj}\ c_{nj}$, ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j det (A) = $a_{i1}\ c_{i1} + a_{i2}\ c_{i2} + a_{i3}\ c_{i3} + \ldots + a_{in}\ c_{in}$, ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i.

Contoh 3.11 :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Hitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang:

a. Baris II

b. Kolom III

J a w a b :

a. $\det(A) = -(-2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + (-4)\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

= 2 (- 2 - 0) – 4 (- 6 – 0) – 3 (12 – 5)

= -4 + 24 – 21 = -1

b. det (A) $= 0 - 3\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

= -3 (12 – 5) – 2 (-12 + 2)

= -3 (7) – 2 (-10) = -1

Contoh 3.12 :

Tentukan nilai determinan dari matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 8 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Jawab :

$m_{11} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = -4$

$c_{11} = -4$

$m_{12} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = -8$

$c_{12} = -8$

$m_{13} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = -2$

$c_{13} = -2$

$Det\ (A) = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}$

= 0. (-4) + 6(8)+0(-2)

= 0+48+0

= 48

Jadi, nilai determinan dari matriks A = 48 .

Pemecahan masalah dengan Wolfram Mathematica:

Det [{{0,6,0},{8,6,8},{3,2,2}}] $(shift + enter)$

48

Definisi 3.2 :

Jika A adalah matriks berukuran (nxn) dan c_{ij} adalah kofaktor a_{ij} maka matriks :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & . & . & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & & & C_{2n} \\ .\ . & . & . & & & . \\ . & . & . & & & . \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & & & C_{nn} \end{bmatrix}$$ dinamakan matriks *kofaktor*

A

Definisi 3.3 :

Transpose matriks kofaktor A dinamakan matriks adjoint A = adj (A)

Contoh 3.13 :

Tentukan matriks kofaktor A dan adj (A), jika diketahui matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

J a w a b :

C_{11} = + (8 – 12) = - 4

C_{21} = - (-2 – 0) = 2

C_{31} = + (3 – 0) = 3

C_{22} = + (- 6 – 0) = -6

C_{22} = - (9 – 0) = -9

C_{13} = + (- 8 + 20) = 12

C_{23} = - (12 – 5) = -7

C_{33} = + (-12 + 12) = -

10

Jadi, Kofaktor A= $\begin{bmatrix} -4 & 11 & 12 \\ 2 & -6 & -7 \\ 3 & -9 & -10 \end{bmatrix}$, sehingga adj A=

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 11 & -6 & -9 \\ 12 & -7 & -10 \end{bmatrix}$$

Definisi 3.4 :

Jika A adalah matriks yang mempunyai invers maka :

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)}$$

Contoh 3. 14 :

Tentukan invers matriks pada contoh 2.12 di atas.

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & 6 & 9 \\ -12 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

LATIHAN SOAL :

1. Cari semua minor dan kofaktor dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ -2 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

2. Diketahui $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, carilah adj(Q).

3. Berdasarkan soal no.2, tentukan det(Q) dan Q^{-1}.

4. Hitunglah det (B) menggunakan ekspansi kofaktor dan reduksi baris, jika diketahui: $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$.

5. Hitunglah det (A), jika diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 7 & -2 \\ 2 & 6 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

BAB 4
SISTEM PERSAMAAN LINIER (SPL)

A. PENGANTAR

SPL adalah suatu himpunan berhingga dari persamaan yang peubahnya berpangkat satu, bukan merupakan hasil kali atau akar peubah dan bukan sebagai argument fungsi trigonometri, fungsi logaritma atau fungsi eksponensial.

Bentuk Umum :

$a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + a_{13}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..+ a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_3 + a_{22}x_2 + a_{23}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..+ a_{2n}x_n = b_2$

$a_{31}x_3 + a_{32}x_3 + a_{33}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots...+ a_{3n}x_n = b_3$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots+ a_{mn}x_n = b_m$ ....(1)

Contoh 4.1 :

$a_1x + b_1y = c_1$

$a_2x + b_2y = c_2$

Penyelesaian :

Penyelesaian contoh 3.1 di atas ada 3 kemungkinan :

$a_1x + b_1y = c_1$ (l_1)

$a_2x + b_2y = c_2$ (l_2)

- Garis l_1 sejajar l_2 , artinya tidak mempunyai titik potong, sehingga SPL tersebut tidak mempunyai penyelesaian.
- Garis l_1 berpotongan dengan l_2 , artinya SPL tersebut mempunyai satu penyelesaian.

- Garis l_1 berimpit dengan l_2, artinya SPL tersebut mempunyai banyak penyelesaian.

Tidak setiap SPL mempunyai penyelesaian, sehingga SPL yang tidak mempunyai penyelesaian disebut tak konsisten (in consistent). Sedangkan SPL yang mempunyai penyelesaian disebut konsisten.

Contoh 4.2 :

$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_nx_n = b$

maka penyelesaiannya adalah :

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = s_1 \\ x_2 = s_2 \\ x_3 = s_3 \\ \quad . \\ x_n = s_n \end{array}\right\}$$ sedemikian sehingga jika nilai tersebut disubstitusikan ke persamaan menghasilkan HP = $\{s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots\ldots\ldots s_n\}$.

Untuk menyelesaikan SPL dari bentuk umum terlebih dahulu diubah kebentuk matriks yang diperbesar atau (Augmented Matriks).

$$\left[\begin{array}{cccccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & a_{3n} & b_3 \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & a_{mn} & b_m \end{array}\right] . \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Kemudian baru dilakukan Operasi Baris Elementer (OBE) yang akan memberikan Himpunan Penyelesaian (HP) yang sama terhadap SPL dari bentuk umum.

Adapun Operasi Baris Elementer adalah sebagai berikut :

1. Kalikan sebuah baris dengan sebuah konstanta yang tidak sama dengan nol (0).
2. Pertukarkanlah dua baris tersebut.
3. Tambahkanlah perkalian dari satu baris pada baris yang lainnya.

B. ELIMINASI GAUSS

Contoh 4.3 :

Selesaikan SPL dengan metode Eliminasi Gauss :x + y + 2z = 9

2x + 4y -3z = 1

3x + 6 y – 5z = 0

J a w a b :

SPL tersebut diubah menjadi matriks yang diperbesar

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Ubahlah matriks yang diperbesar tadi menjadi bentuk eselon baris yaitu dengan mengubah elemen-elemen di bawah diagonal utama menjadi nol semuanya.

Adapun langkah-langkah untuk mengenolkan elemen-elemen di bawah diagonal utama adalah sbb:

1. Pilih salah satu baris yang tidak nol semuanya.
2. Pilih satu elemen dari baris tersebut menjadi satu utama (pivot), jika ada ambil yang elemennya sama dengan satu (1).
3. Jadikan nol semua elemen yang sekolom dengansatu utama tadi dengan operasi Baris Elementer (OBE).
4. Untuk baris sisanya dilakukan OBE sampai diperoleh elemen nol semuanya.

Sehingga penyelesaian contoh di atas adalah sbb :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} tambahkanlah\ (-2)\ kali\ B1\ pada\ B2 \\ tambahkanlah\ (-3) kali\ B1\ pada\ B2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -17 \end{array}\right] B2\ dikalikan\ dengan\ \left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\tfrac{7}{2} & -\tfrac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right] tambahkan\ (-3)\ kali\ B2\ pada\ B3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\tfrac{7}{2} & -\tfrac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\tfrac{1}{2} & -\tfrac{3}{2} \end{array}\right] B3x(-2)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\tfrac{7}{2} & -\tfrac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \qquad ....(3)$$

Matriks di atas, jika dikembalikan ke bentuk sisitem persamaan linier, adalah sbb :

x + y + 2z = 9 ………………..(1)

y – 7/2z = - 17/2 ……………..(2)

z = 3 …………………………(3)

Jadi HP = { 1, 2, 3 }

Keterangan :

Sistem Persamaan Linier (SPL) pada contoh di atas adalah SPL yang mempunyai satu penyelesaian, dimana banyaknya persamaan dan banyaknya peubah adalah sama yaitu 3.

Apabila SPL pada contoh di atas akan diselesaikan dengan metode Eliminasi Gauss-Jordan, maka berarti kita akan mengubah matriks yang diperbesar menjadi bentuk eselon baris tereduksi yaitu mengubah elemen-elemen dibawah diagonal utama dan di atas diagonal utama menjadi nol semua, yang berarti kita akan melanjutkan Operasi Baris Elementer (OBE) terhadap matriks (3).

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\tfrac{7}{2} & -\tfrac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] tambahkanlah\ (-1)\ kali\ B2\ pada\ B1$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & \tfrac{11}{2} & \tfrac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\tfrac{7}{2} & -\tfrac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} tambahkan\ (\tfrac{7}{2})\ kali\ B3\ pada\ B2 \\ tambahkan\ (-\tfrac{11}{2})\ kali\ B3\ pada\ B1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Jadi jika dikembalikan pada SPL diperoleh :

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{array}\right\} \therefore\ HP = \{1,2,3\}$$

Pemecahan masalah dengan Wolfram Mathematica:

m={{1,1,2},{2,4,-3},{3,6,-5}} $(shift + enter)$

{1,1,2},{2,4,-3},{3,6,-5}}

m.{x,y,z}=={9,1,0} $(shift + enter)$

{x+y+2 z,2 x+4 y-3 z,3 x+6 y-5 z}={9,1,0}

Solve[%,{x,y,z}] $(shift + enter)$

{{x=1,y=2,z=3}}

Contoh 4.4 :

Selesaikan Sistem Persamaan Linier berikut : $x_1 + 4x_4 = -1$

$x_2 + 2x_4 = 6$

$x_3 + 3x_4 = 2$

J a w a b :

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 4x_4 &= -1 \\ x_2 + 2x_4 &= 6 \\ x_3 + 3x_4 &= 2 \end{aligned}\right\}$$ SPL diubah ke bentuk Augmented matriks (matriks yang diperbesar)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

Dari matriks di atas nampak bahwa x_1, x_2, x_3, sudah sesuai dengan satu utama dan dinamakan peubah-peubah utama (*Leading Variabel*), sehingga dengan menyelesaikan peubah-peubah utama dalam x_4 akan diperoleh penyelesaian sbb :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -1 - 4x_4 \\ x_2 &= 6 - 2x_4 \\ .x_3 &= 2 - 3x_4 \end{aligned}\right\}$$ dengan mengambil $x_4 = t$ (parameter), maka

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 - 4t \\ x_2 &= 6 - 2t \\ x_3 &= 2 - 3t \\ x_4 &= t \end{aligned}$$

sehingga, X = { x_1, x_2, x_3, x_4 } dengan t = sembarang bilangan

Jadi HP = {-1 – 4t, 6 – 2t, 2 – 3t, t }

Pemecahan masalah dengan Wolfram Mathematica:

m = {{1,0,0,4},{0,1,0,2},{0,0,1,3}} $(shift + enter)$

{{1,0,0,4},{0,1,0,2},{0,0,1,3}}

m.{u,v,w,x}={-1,6,2} $(shift + enter)$

{u+4 x,v+2 x,w+3 x}={-1,6,2}

Solve[%,{u,v,w,x}] $(shift + enter)$

Solve::svars: Equations may not give solutions for all "solve" variables. =

{{v=13/2+u/2,w=11/4+(3 u)/4,x=-(1/4)-u/4}}

Contoh 4.5 :

Selesaikan Sistem Persamaan Linier berikut : $x_1 + 6x_2 + 4x_5 = -2$

$x_3 + 3x_5 = 1$

$x_4 + 5x_5 = 2$

J a w a b :

Matriks diperbesarnya adalah : $\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 6 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right]$

Dari matriks di atas nampak bahwa x_1, x_3, x_4 adalah merupakan peubah-peubah utama, sehingga dengan menyelesaikan peubah-peubah utama dalam peubah-peubah lainnya diperoleh penyelesaian sebagai berikut :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -2 - 6x_2 - 4x_5 \\ x_3 &= 1 - 3x_5 \\ x_4 &= 2 - 5x_5 \end{aligned}\right\}$$ Dengan mengambil $x_2 = t$, $x_5 = s$; dengan t, s = sembarang bil.

maka, $x_1 = -2 - 6t - 4s$

$x_3 = 1 - 3s$

$x_4 = 2 - 5s$

sehingga, X = $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{-2 - 6t - 4s, t, 1 - 3s, 2 - 5s, s\}$

Sehingga HP = $\{ -2 - 6t - 4s, t, 1 - 3s, 2 - 5s, s \}$

Pemecahan masalah dengan Wolfram Mathematica:

m = {{1,6,0,0,4},{0,0,1,0,3},{0,0,0,1,5}} $(shift + enter)$

{{1,6,0,0,4},{0,0,1,0,3},{0,0,0,1,5}}

m.{u,v,w,x,y}=={-2,1,2} $(shift + enter)$

{u+6 v+4 y,w+3 y,x+5 y}={-2,1,2}

Solve[%,{u,v,w,x,y}] $(shift + enter)$

Solve::svars: Equations may not give solutions for all "solve" variables. =

{{w=5/2+(3 u)/4+(9 v)/2,x=9/2+(5 u)/4+(15 v)/2,y=-(1/2)-u/4-(3 v)/2}}

Contoh 4.6 :

Selesaikan Sistem Persamaan Linier berikut : $x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$

$$0x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

$$0x_1 - x_2 - 2x_3 = 1$$

J a w a b :

Matriks diperbesarnya adalah : $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] B3+(1xB2)$

Karena belum nampak peubah utamanya maka dengan Operasi Baris Elementer (OBE), matriks di atas diubah menjadi :

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Dari matriks di atas nampak bahwa baris III, $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$, tidak pernah dapat diperoleh untuk harga x yang manapun.

Sehingga sisitem persaman linier di atas tidak mempunyai penyelesaian.

Pemecahan masalah dengan Wolfram Mathematica:

m = {{1,0,0},{0,1,2},{0,-1,-2}} $(shift + enter)$

{{1,0,0},{0,1,2},{0,-1,-2}}

m.{x,y,z}=={0,0,1} $(shift + enter)$

{x,y+2 z,-y-2 z}={0,0,1}

Solve[%,{x,y,z}] $(shift + enter)$

{}

C. SPL HOMOGEN

SPL dikatakan homogen jika suku konstanta sama dengan nol (0), yaitu berbentuk :

$$\begin{array}{llllll}
a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + a_{13}x_3 & . & . & a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + a_{23}x_3 & . & . & a_{2n}x_n = 0 \\
a_{31}x_1 & + a_{32}x_2 & + a_{33}x_3 & . & . & a_{3n}x_n = 0 \\
. & . & . & & & . \\
. & . & . & & & . \\
a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + a_{m3}x_3 + & . & . & a_{mn}x_n = 0
\end{array}$$

SPL homogen adalah sistem yang konsisten karena selalu mempunyai penyelesaian untuk $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0,\ldots,x_n = 0$.

1. Dan penyelesaian tersebut disebut penyelesaian trivial.
2. Jika ada penyelesaian yang lain maka disebut penyelesaian non trivial.
3. Pada SPL jika banyaknya peubah (n) lebih banyak dari banyaknya persamaan (m) maka pasti mempunyai banyak penyelesaian.

Contoh 4.7 :

Selesaikan sistem persamaan linear berikut :

$2x+2y+2z=0$

$-2x+5y+2z=0$

$-7x+7y+z=0$

Jawab :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ -7 & 7 & 1 \end{bmatrix} R_1\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -7 & 7 & 1 \end{bmatrix} R_2 + (2)R_1;\ R_3 + (7)R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 14 & 8 \end{bmatrix} R_2\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4/7 \\ 0 & 14 & 1 \end{bmatrix} R_1 + (-1)R_2; (-14)R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/7 \\ 0 & 1 & 4/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \frac{4x}{3} \;; \qquad z = \frac{-7x}{3}$$

jadi, sistem persamaan linear tersebut memiliki penyelesaian tak hingga dengan nilai $y = \frac{4x}{3}$ dan $z = \frac{-7x}{3}$

Pemecahan masalah dengan Wolfram Mathematica:

$n = \{\{2,2,2\}, \{-2,5,2\}, \{-7,7,1\}\}$ $(shift + enter)$

$\{\{2,2,2\}, \{-2,5,2\}, \{-7,7,1\}\}$

$n.\{x, y, z\} == \{0,0,0\}$ $(shift + enter)$

$\{2x + 2y + 2z, -2x + 5y + 2z, -7x + 7y + z\} == \{0,0,0\}$

$Solve[\%, \{x, y, z\}]$ $(shift + enter)$

Solve::svars: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

$$\left\{\left(\left(y \to \frac{4x}{3}\right), \quad z \to \frac{7x}{3}\right)\right\}$$

jadi, sistem persamaan linear tersebut memiliki penyelesaian tak hingga dengan nilai y = 4x/3 dan z = -7x/3 .

Contoh 4.8 :

Selesaikan SPL homogen berikut dengan metode Gauss-Jordan.

$$2x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 0$$

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0$$

$$x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

J a w a b :

Matriks yang diperbesar dari SPLH di atas adalah :

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$ Melalui OBE, matriks yang diperbesar

ini diubah menjadi matriks berbentuk eselon baris tereduksi sbb : B1 ditukar dengan B3

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} B2 + (1xB1) \\ B3 + (-2xB1) \end{array} \text{ menjadi}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] B2x \ (-⅓)$$

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] B4 + (-1x\,B2) \text{ menjadi}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] B3 + \ (-3x\ B4)$$

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] B1 + \ B4 \ \text{ menjadi}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] B2x\ (-\tfrac{1}{3})$$

Dari matriks ini maka SPLH yang bersesuaian adalah :

$x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$x_4 = 0$

$x_3 + x_5 = 0$

Nampak bahwa peubah utamanya : x_1, x_4 dan x_5 , sehingga SPL menjadi :

$x_1 = - x_2 + x_3$

$x_4 = 0$

$x_5 = -x_3$

Jika dimisalkan untuk $x_2 = s$, dan $x_3 = t$ maka diperoleh :

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -s + t \\ x_4 = 0 \\ x_5 = -t \end{array}\right\} \text{Sehingga : HP} = \{ -s + t, s, t, 0, -t \}$$

Jika diambil s = 1 dan t = 1 maka diperoleh himpunan penyelesaian (HP) nya:

HP = { 0, 1, 1, 0, -1 }

Jika HP nya disubstitusikan ke persamaan-persamaan liniernya akan sama dengan nol.

Pemecahan masalah dengan Wolfram Mathematica:

m = {{2,2,-1,0,1},{-1,-1,2,-3,1},{1,1,-2,0,-1},{0,0,1,1,1}}

$(shift + enter)$

{{2,2,-1,0,1},{-1,-1,2,-3,1},{1,1,-2,0,-1},{0,0,1,1,1}}

m.{u,v,w,x,y}=={0,0,0,0}

$(shift + enter)$

{2 u+2 v-w+y,-u-v+2 w-3 x+y,u+v-2 w-y,w+x+y}={0,0,0,0}

Solve[%,{u,v,w,x,y}]

$(shift + enter)$

Solve::svars: Equations may not give solutions for all "solve" variables. =

{{w=u+v,x=0,y=-u-v}}

D. PENGGUNAAN INVERS PADA SPL

Jika matriks $A_{(nxn)}$ dapat dibalik, maka untuk setiap matriks $B_{(nx1)}$ pada SPL

Ax = B mempunyai tepat satu penyelesaian yaitu $x = A^{-1}B$

Contoh 4.9 :

Selesikan SPL berikut : $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3$$

$$x_1 + 8x_3 = 17$$

Penyelesaian SPL tersebut diubah menjadi : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$

atau AX = B,

kemudian akan dicari $(A \mid I) \rightarrow (I, A^{-1})$ sebagai berikut :

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} B2 + (-2)B1 \\ B3 + (-1)B1 \end{matrix} \text{ menjadi}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} B1 + (-2)B2 \\ B3 + 2B2 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} B1 + 9B3 \\ B2 + (-3)B3 \end{matrix} \text{ menjadi}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] B3x(-1)$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Jadi penyelesaian SPL : X = A^{-1}.B

$$X = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{jadi} \quad \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \end{matrix}$$

SPL AX = B dimana A tidak dapat dibalik maka agar SPL tersebut konsisten, harus direduksi matriks diperbesar tersebut menjadi bentuk matriks eselon baris dengan cara OBE. Kemudian kita tentukan matriks B agar SPL konsisten.

Pemecahan masalah dengan Wolfram Mathematica:

m = {{1,2,3},{2,5,3},{1,0,8}} $(shift + enter)$

{{1,2,3},{2,5,3},{1,0,8}}

m.{x,y,z}=={5,3,17} $(shift + enter)$

{x+2 y+3 z,2 x+5 y+3 z,x+8 z}={5,3,17}

Solve[%,{x,y,z}] $(shift + enter)$

{{x=1,y=-1,z=2}}

Contoh 4.9 :

Tentukan b_1, b_2, b_3 agar SPL konsisten, jika :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= b_1 \\ x_1 + x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

J a w a b :

Penyelesaian SPL dalam matriks :

$$\begin{array}{ccc} A & X & B \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \end{array}$$

sehingga (A | B)

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & 3 & b_3 \end{array}\right] \begin{array}{l} B2+(-1)B1 \\ B3+(-2)B1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & -b_1+b_2 \\ 0 & -1 & -1 & -2b_1+b_3 \end{array}\right] B3+(-1)B2$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & -b_1+b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -b_1-b_2+b_3 \end{array}\right]$$

Jadi SPL akan konsisten jika : $-b_1 - b_2 + b_3 = 0$ atau

$b_3 = b_1 + b_2$

E. ATURAN *CRAMER*

Jika AX = B adalah system persamaan linier dengan n persamaan dan m bilangan tak diketahui sedemikian sehingga det (A) ≠ 0, maka SPL tersebut mempunyai penyelesaian unik (tunggal) yaitu :

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)},\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

dimana :

1. $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n$ adalah variable yang tidak diketahui.
2. $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, A_n$ adalah matriks A yang entri-entri dalam kolom ke j diganti dengan entri-entri dalam matriks B.

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

Contoh 4.10 :

Selesaikan SPL berikut dengan metode aturan *Cramer.*

$3x_1 + x_2 = 6$

$-2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -20$

$5x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 21$

Penyelesaiannya :

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}, \ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 \\ -20 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -20 & -4 & 3 \\ 21 & 4 & -2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -2 & -20 & 3 \\ 5 & 21 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ -2 & -4 & -20 \\ 5 & 4 & 21 \end{bmatrix}$$

det (A) = -1

det (A_1) = 6 (8 – 12) – 1 (40 – 63) = - 24 + 23 = -1

det (A_2) = 3 (40 – 63) – 6 (4 – 15) = - 69 + 66 = -3

det (A_3) = 3 (- 84 + 80) – (-2) (21 – 24) + 5 (- 20 + 24)

= 3 (- 84 + 80) – (-2) (21 – 24) + 5 (- 20 + 24)

= 3. -4 + 2. -3 + 5.4 = 2

Jadi $x_1 = \frac{-1}{-1} = -1$, $x_2 = \frac{-3}{-1} = 3$

$x_3 = \frac{2}{-1} = -2$

Pemecahan masalah dengan Wolfram Mathematica:

m = {{3,1,0},{-2,-4,3},{5,4,-2}} $(shift + enter)$

{{3,1,0},{-2,-4,3},{5,4,-2}}

m.{x,y,z}=={6,-20,21} $(shift + enter)$

{3 x+y,-2 x-4 y+3 z,5 x+4 y-2 z}={6,-20,21}

Solve[%,{x,y,z}] $(shift + enter)$

{{x=1,y=3,z=-2}}

SOAL LATIHAN:

1. Diketahui matriks A dan B berordo 3x3

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } B=\begin{pmatrix} x & x+y & y+z \\ z-a & b & b+2c \\ x+d & y-e & e+f \end{pmatrix}$$

   Jika A = B, tentukan nilai a,b,c,d,e,f,x,y dan z.

2. Jika H adalah matriks berordo 3x3, tentukan matriks H dari persamaan berikut:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} - 5H = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 15 \\ 4 & 20 & -11 \\ 1 & -2 & -12 \end{pmatrix}$$

3. Selesaikan setiap persamaan berikut:

   a. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 2 & -1 \\ z & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{pmatrix}$

4. Carilah nilai x_1, x_2, x_3 yang memenuhi Sistem Persamaan Linier berikut:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

5. Carilah nilai x, y, z, dan w yang memenuhi Sistem Persamaan Linier berikut:

   2x + 4y + 3z + 2w = 1

   3x + 6y + 5z + 2w = 1

   2x + 5y + 2z - 3w = 0

   4x + 5y + 14z + 14w = 0

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard & C. Rorres. 2004. *Ajabar Linier Elementer dan aplikasinya*. Jakarta: Erlangga.

Anton, Howard & C. Rorres. 2005. *Aljabar Linier Elementer edisi 8.* (Alih Bahasa : Irzam Harmein, Julian Gressando, editor : Amalia Safitri). Jakarta: Erlangga.

Imrona, M. 2012. *Aljabar Linear Dasar*. Jakarta: Erlangga.

Kwak, J.H & Hong, S. 2017. *Linear Algebra*. Boston : Birkhauser.

Budi, W.S. 2015. *Aljabar Linear*. Jakarta : Gramedia.

Lipschutz, S. 2017. *Theory and Problems of Linear Algebra*. Singapore: Mc-Graw-Hill Inc.