Seri : Pendidikan Matematika

Modul 2

FUNGSI KOMPLEKS

(Untuk Kalangan Sendiri)

Oleh:

FX. Didik Purwosetiyono, S.Pd., M.Pd.

\

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

UNIVERSITAS PGRI SEMARANG

2022

Judul: Modul 2 Fungsi Kompleks

Oleh:

FX. Didik Purwosetiyono, S.Pd., M.Pd.

2022 Program Studi Pendidikan Matematika
Universitas PGRI Semarang

Untuk Kalangan Sendiri

Kompetensi	Pemula		√
	Menengah		√
	Lanjutan		
	Profesional		

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat-Nya, sehingga Modul yang berjudul ” **Fungsi Kompleks**” dapat diselesaikan untuk bahan ajar mata kuliah Analisis Kompleks semester VII Prodi Pendidikan Matematika UNIVERSITAS PGRI Semarang. Terselesaikannya penulisan Modul ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin memberikan ucapan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada pihak-pihak yang mendukung terselesaikannya modul ini. Ucapan terima kasih dan penghargaan penulis ucapkan kepada yang terhormat:

1. Dr. Lilik Ariyanto, M.Pd., Ka.Prodi Pendidikan Matematika
2. Pihak-pihak lain yang membantu penulisan modul ini.

Akhirnya semoga bantuan yang telah diberikan kepada penulis, mendapat balasan yang indah dari Tuhan Yang Maha Pemurah. Penulis menyadari tulisan ini masih banyak kekurangan, oleh karena itu segala saran dan kritik akan selalu penulis harapkan demi perbaikan yang lebih sempurna. Semoga modul ini dapat memberikan sumbangan berarti dalam dunia pendidikan. Amin.

Semarang, Agustus 2022

Penulis

DAFTAR ISI

KOMPETENSI

Kompetensi Umum

Mahasiswa memahami Bilangan Kompleks, operasi dan sifat-sifatnya, rumus Euler dan teorema De'Moivre, Fungsi Kompleks dan sifat-sifatnya, Limit Fungsi, Kontinu di suatu titik, Barisan, Turunan, Fungsi Elementer

Deskripsi Mata Kuliah

Mata kuliah ini berisi tentang operasi bilangan kompleks, konsep-konsep dan teorema-teorema dalam Kalkulus dengan Peubah Kompleks, serta dapat menggunakan konsep-konsep dan teorema-teorema itu untuk memecahkan berbagai masalah

Kompetensi Dasar

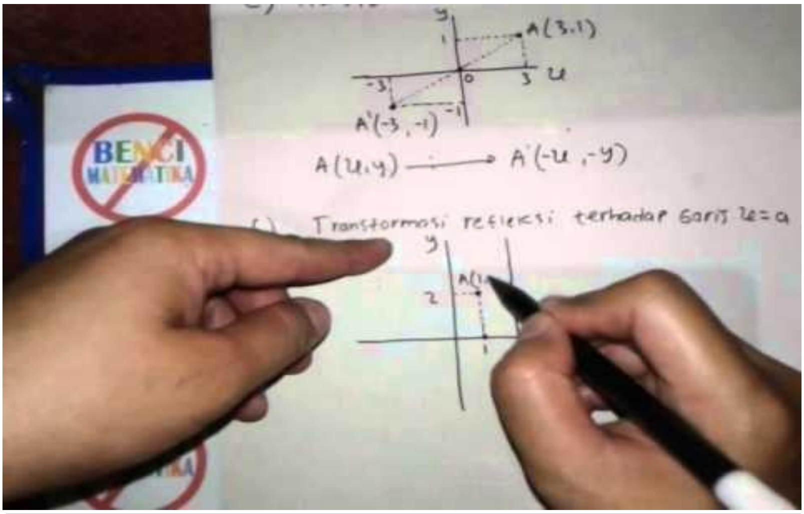
1. Fungsi Kompleks, jenis fungsi
2. Menjelaskan Limit Fungsi dan Teorema
3. Menyelesaikan permasalahan Kekontinuan

Tujuan Pembelajaran

1. Mahasiswa dapat menjelaskan Fungsi Kompleks, jenis fungsi, serta implementasi penggunaannya.
2. Mahasiswa dapat menjelaskan Limit Fungsi dan Teorema, serta pemecahan masalah yang berhubungan dengan limit fungsi dan teorema Hospital, serta menggunakan dalam penyelesaian soal
3. Mahasiswa dapat mengelompokkan jenis-jenis Kekontinuan, serta dapat menerapkannya dalam penyelesaian masalah.

MODUL 2

FUNGSI KOMPLEKS



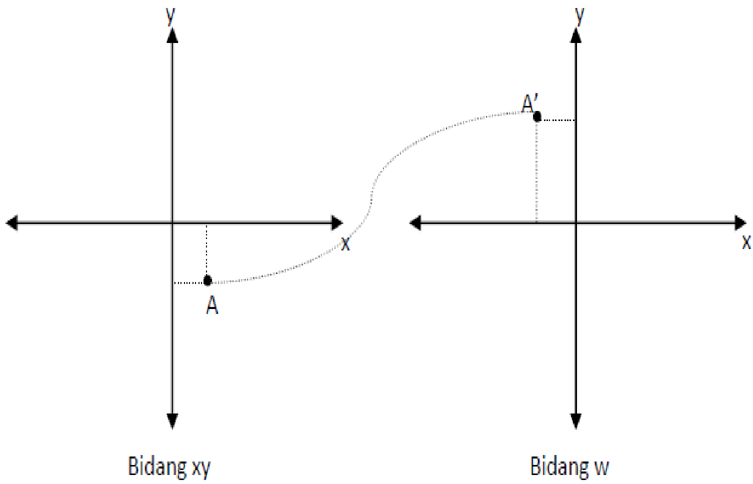
1. Fungsi Kompleks, jenis fungsi
2. Menjelaskan Limit Fungsi dan Teorema
3. Menyelesaikan permasalahan Kekontinuan

A. Fungsi Kompleks

Definisi Misalkan S himpunan bilangan kompleks. Fungsi kompleks f pada S adalah aturan yang mengawankan setiap $z \in S$ dengan bilangan kompleks w.

Notasi $w = f(z)$.

Dalam hal ini, S disebut domain dari f dan z dinamakan variabel kompleks.



Gambar 7. Transformasi fungsi kompleks

Misalkan $w = u + iv$ adalah nilai fungsi f di $z = x + iy$, sehingga

$u + iv = f(x + iy)$.

Masing-masing bilangan riil u dan v bergantung pada variabel riil x dan y, sehingga $f(z)$ dapat dinyatakan sebagai pasangan terurut dari variabel riil x dan y, yaitu

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Jika koordinat polar r dan θ pada x dan y digunakan, maka

$u + iv = f(re^{i\theta})$,

dimana $w = u + iv$ dan $z = re^{i\theta}$. Sehingga $f(z)$ dapat ditulis menjadi

$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$.

Contoh 1

Misalkan $w = f(z) = z^2 + 3z$.

Tentukan u dan v serta hitung nilai dari f pada

$z = 1 + 3i$. Nyatakan juga u dan v dalam bentuk polar !

Penyelesaian:

Diketahui $w = f(z) = z^2 + 3z$.

Misal $z = x + iy$,

sehingga

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+iy) = (x+iy)^2 + 3(x+iy) \\ &= x^2 + 3x - y^2 + i(2xy + 3y) \end{aligned}$$

Jadi $u = x^2 + 3x - y^2$ dan $v = 2xy + 3y$.

Untuk $z = 1 + 3i$

maka $f(z) = f(1+3i) = (1+3i)^2 + 3(1+3i) = -5 + 15i$.

Jadi $u(1,3) = -5$ dan $v(1,3) = 15$.

Jika koordinat polar digunakan dimana $z = re^{i\theta}$,

maka

$$\begin{aligned} f(z) = f(re^{i\theta}) = (re^{i\theta})^2 + 3(re^{i\theta}) &= r^2e^{2i\theta} + 3re^{i\theta} \\ &= r^2\cos 2\theta + ir^2\sin 2\theta + 3r\cos\theta + 3ir\sin\theta \\ &= r^2\cos 2\theta + 3r\cos\theta + i(r^2\sin 2\theta + 3r\sin\theta) \end{aligned}$$

Jadi $u = r^2\cos 2\theta + 3r\cos\theta$ dan

$v = r^2\sin 2\theta + 3r\sin\theta$.

Contoh 2:

Jika $f(z) = 2z^2 + iy$. Tentukan fungsi kompleks dalam *z*

Penyelesaian

Jika $z = x + iy$ dan $\bar{z} = x - iy$

menyebabkan

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}\ dan\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

sehingga

$$f(z) = 2\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 + i\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(z^2 + \bar{z}^2 + z - \bar{z}) + z\bar{z}$$

Contoh 3: Diketahui $f(z) = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$

a. Nyatakan dalam bentuk *z*

b. Tentukan *u* dan *v*

c. Tentukan *f(1*+2*i)*

Penyelesaian:

a. $f(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} + i\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + \frac{\left(\frac{z + \bar{z}}{2i}\right) + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)}{z\bar{z}} = z + \frac{1}{z}$

b. $f(z) = x + iy + \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{iy}{x^2 + y^2}$

diperoleh

$u = x + \frac{x}{x^2 + y^2}$ dan $v = x + \frac{x}{x^2 + y^2}$

c. $f(z) = z + \frac{1}{z} = 1 + 2i + \frac{1}{1 + 2i} = \frac{6}{5} + \frac{8}{5}i$

B. Transformasi

Sifat-sifat dari fungsi bernilai riil dapat dilihat dari grafik fungsinya. Tetapi untuk *w* = *f(z)*, dimana *w* dan *z* bilangan kompleks, tidak ada grafik yang menyatakan fungsi *f* karena setiap bilangan *z* dan *w* berada di bidang bukan di garis bilangan.

Definisi Transformasi	Korespondensi antara titik-titik di bidang-*z* dengan titik-titik di bidang-*w* disebut pemetaan atau transformasi dari titik-titik di bidang-*z* dengan titik-titik di bidang *w* oleh fungsi *f*.

Contoh :

Jika $w = u + v$ (dimana u dan v riil) adalah suatu fungsi bernilai tunggal dari z = x + iy (dimana x dan y riil) maka kita dapat menuliskan sebagai $u + v = f(x, y)$

akibatnya diperoleh suatu transformasi, dengan menyamakan bagian riil dan khayal, maka dapat dinyatakan setara dangan;

$u = u(x, y)$

$v = v(x, y)$

Misal $w = u + iv$ dan $z = x + iy$

Jika diberikan suatu fungsi $w = z^2$

$maka\ \ u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

Jadi transformasinya adalah $u = x^2 - y^2$ dan $v = 2xy$

Jika diberikan suatu titik tertentu yaitu titik (1,2) maka bayangan titik tersebut di bidang w terhadap transformasi suatu fungsi $w = z^2$ adalah titik (-3, 4).

C. Titik Cabang dan Garis Cabang

Misal untuk kasus $w = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ (apakah fingsi tersebut akan membuat putaran penuh yang arahnya berlawanan dengan jarum jam?)

diperoleh $z^{\frac{1}{2}} = re^{i\theta}$

dan $w = \sqrt{r}\ e^{\frac{i\theta}{2}}$

jika $\theta = \theta_1$ dan $w = \sqrt{r}\ e^{\frac{i\theta}{2}}$

maka $\theta = \theta_1 + 2\pi$ dan $w = \sqrt{r}\ e^{\frac{i(\theta + 2\pi)}{2}}$

Jika $w = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ diputar sebesar satu putaran (360^0) kita belum bisa sampai pada nilai w yang sama, tapi dengan membuat satu lintasan lengkap kedua maka akan diperoleh nilai w yang sama atau dengan kata lain kembali ke titik semula.

Sehingga untuk membuat satu putaran penuh diperlukan $\theta = \theta_1 + 4\pi$, yaitu $w = \sqrt{r}\ e^{\frac{i\theta}{2}}$ akan sama dengan $w = \sqrt{r}\ e^{\frac{i(\theta + 4\pi)}{2}}$

(Coba anda analisis untuk kasus $w = f(z) = z^{\frac{1}{3}}$ *dan* $w = f(z) = z^{\frac{1}{5}}$ *, dsb.)*

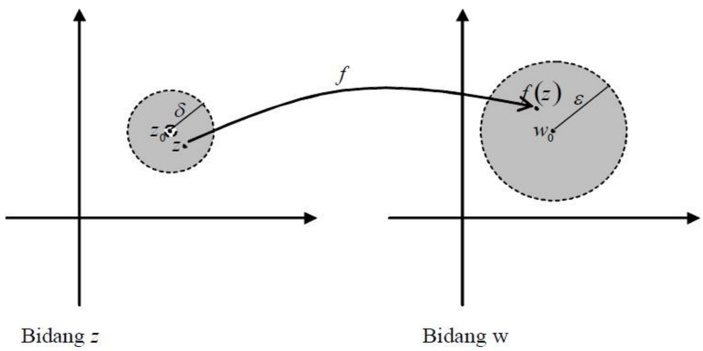
Kompetensi 2: Soal – Soal latihan untuk diselesaikan !

1. Tentukan fungsi $f(z)$ dan jika $z = 1, 1+i, i, -1+i,$ dan -1, jika;
   a. $f(z) = \frac{1}{z}$
   b. $f(z) = iz$
   c. $f(z) = z^2 + 1$
2. Jika $f(z) = z^2$, tentukan
   a. $-2+i$
   b. $1-3i$
3. Jika $z = 1+2i$
   a. $f(z) = \frac{x-iy}{1+z}$
   b. $f(z) = \frac{1}{|z|}$
4. Misalkan $w = f(z) = z(2-z)$. Tentukan nilai w yang dinyatakan dengan

D. Limit Fungsi

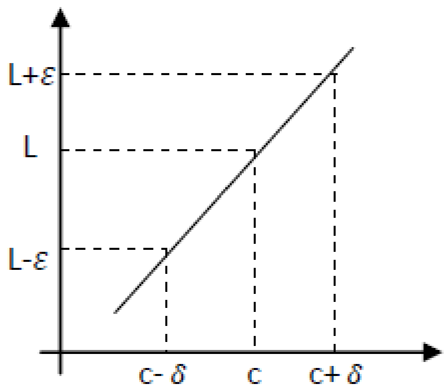
Limit merupakan salah satu konsep kunci dalam kajian analisis. Sedangkan limit fungsi merupakan konsep yang digunakan untuk membahas materi kekontinuan fungsi, turunan fungsi, dan integral. Begitu pun halnya dalam fungsi kompleks. Limit fungsi di suatu z_0 menggambarkan perilaku fungsi di sekitar z_0. Secara intuisi kita dapat menghitung limit fungsi kompleks, seperti di kalkulus.

Secara formal definisi limit fungsi ditunjukkan oleh gambar berikut.



Gambar 8. Daerah limit fungsi

Secara umum definisi limit dalam kompleks sama dengan definisi limit pada bilangan riil dalam kalkulus. Kalau pada bilangan riil bila x mendekati x_0 hanya mendekati sepanjang garis riil sedangkan pada bilangan kompleks bila z mendekati z_0 akan mendekati dari semua arah dalam bidang kompleks.



Gambar 9. Limit fungsi kompleks

Andaikan suatu fungsi $f(z)$ adalah fungsi kompleks dengan variabel z dan limit $f(z)$ adalah L dengan z mendekati z_0 yaitu

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ sehingga $|f(z) - L| < \varepsilon \; jika \; 0 < |z - z_0| < \delta$

Secara geometri definisi di atas mengatakan bahwa untuk setiap lingkungan ε dari L, yaitu $|f(z) - L| < \varepsilon$ ada suatu lingkungan δ dari z_0, yaitu $0 < |z - z_0| < \delta$ sedemikian sehingga setiap titik z pada image f(z) berada pada lingkungan ε.

Teorema Limit

Jika $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$ *dan* $\lim_{z \to z_0} g(z) = B$, *maka:*

1. $\lim_{z \to z_0} \{ f(z) + g(z) \} = \lim_{z \to z_0} f(z) + \lim_{z \to z_0} g(z) = A + B$

2. $\lim_{z \to z_0} \{ f(z) - g(z) \} = \lim_{z \to z_0} f(z) - \lim_{z \to z_0} g(z) = A - B$

3. $\lim_{z \to z_0} \{ f(z)\, g(z) \} = \left\{ \lim_{z \to z_0} f(z) \right\} \left\{ \lim_{z \to z_0} g(z) \right\} = AB$

4. $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim_{z \to z_0} f(z)}{\lim_{z \to z_0} g(z)} = \dfrac{A}{B}$, *jika* $B \neq 0$

Contoh 1:

Diketahui

$$\lim_{x \to 2} (2x - 1) = 3$$

dan $\varepsilon = 0{,}01$. Tentukan δ

Penyelesian

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

$$|2x - 1 - 3| < 0{,}01$$

$$|2x - 4| < 0{,}01$$

$$|2||x - 2| < 0{,}01$$

$$|x - 2| < 0{,}005$$

Karena

$$|2x - 1 - 3| < 0{,}01 \rightarrow |x - 2| < \delta$$

$$|x - 2| < 0{,}005 \rightarrow |x - 2| < \delta$$

Maka diperoleh

$$\delta = 0{,}005 = \frac{1}{2}\varepsilon$$

Contoh 2:

Jika f(z) = 3z + 2i, buktikan $\lim_{z \to i} f(z) = 5i$

Bukti :

Ambil $\varepsilon > 0$

Pilih $\delta = \{ \ \varepsilon \ \}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |z - i| < \delta \quad berlaku |f(z) - L| < \varepsilon$

Maka

$|f(z) - L| = |(3z + 2i) - 5i| = |3z - 3i| = |3(z - i)| < 3\delta$

Dari definisi $|f(z) - L| < \varepsilon$

Dari perhitungan $|f(z) - L| < 3\delta$

Diperoleh $3\delta = \varepsilon \quad atau \quad \delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$

Sehingga nilai limitnya ada, jadi $\lim_{z \to i} f(z) = 5i$

Contoh 3:

Misalkan $f(z) = \dfrac{z}{\bar{z}}$. Buktikan $\lim_{z \to 0} f(z)$ tidak ada.

Bukti:

Akan ditunjukkan nilai limit dengan lintasan yang berbeda.

- Pendekatan sepanjang sb-*x* positif, dalam hal ini *y = 0.*

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x + iy}{x - iy} = \lim_{(x,0)} \frac{x + i.0}{x - i.0} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

.

- Pendekatan sepanjang sb-y positif, dalam hal ini $x = 0$.

  $$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+iy}{x-iy} = \lim_{(0,y)} \frac{0+i.y}{0-i.y} = \lim_{y\to 0} -1 = -1$$

  .

- Pendekatan sepanjang garis $y = x$.

  $$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x+iy}{x-iy} = \lim_{x\to 0} \frac{x+i.x}{x-i.x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+i)}{x(1-i)} = \frac{1+i}{1-i}$$

  .

Karena pendekatan sepanjang arah yang berbeda menghasilkan

nilai yang tidak sama maka $\lim_{z\to 0} f(z)$ tidak ada.

Contoh 4:

Hitunglah $lim_{z\to 1+i} z^2 - 5z + 10$ dengan menggunakan teorema limit

Penyelesaian

$$\lim_{z\to 1+i} z^2 - 5z + 10 = \lim_{z\to 1+i} z^2 - \lim_{z\to 1+i} 5z + \lim_{z\to 1+i} 10$$

$$= (1+i)^2 - 5(1+i) + 10$$

$$= 5 - 3i$$

E. Limit Barisan

Suatu fungsi dengan peubah bilangan positif, yang dinyatakan oleh f(n) atau u_n , dimana n=1,2,3,…, ∞ dinamakan suatu barisan. Jadi suatu barisan adalah suatu himpunan dengan u_1 , u_2, u_3,…, ∞ dalam suatu urutan tertentu yang diatur dan dibentuk melalui sesuatu aturan tertentu. Setiap bilangan dalam barisan dinamakan suku dan u_n dinamakan suku ke n. Barisan u_1 , u_2, u_3,…, ∞ yang disingkat dengan tulisan $\{u_n\}$. Barisan tersebut dinamakan barisan berhingga atau tak berhingga sesuai apakah bilangan yang terlibat banyaknya berhingga atau tidak.

Teorema pada Limit Barisan

Jika $\lim\limits_{z\to\infty} a_n = A$ *dan* $\lim\limits_{z\to\infty} b_n = B$, *maka:*

1. $\lim\limits_{z\to\infty}\{a_n + b_n\} = \lim\limits_{z\to\infty} a_n + \lim\limits_{z\to\infty} b_n = A + B$
2. $\lim\limits_{z\to\infty}\{a_n - b_n\} = \lim\limits_{z\to\infty} a_n - \lim\limits_{z\to\infty} b_n = A - B$
3. $\lim\limits_{z\to\infty}\{a_n\, b_n\} = \left\{\lim\limits_{z\to\infty} a_n\right\}\left\{\lim\limits_{z\to\infty} b_n\right\} = AB$
4. $\lim\limits_{z\to n}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{z\to n} a_n}{\lim\limits_{z\to n} b_n} = \dfrac{A}{B}$, *jika* $B \neq 0$

Misal terdapat suatu bilangan l dinamakan limit suatu barisan tak hingga $u_1, u_2, u_3 \ldots, \infty$ yang didefinisikan:

$\forall \varepsilon > 0,\ \ n > N, berlaku\ |u_n - l| < \varepsilon\ \ maka\ \ \lim_{n\to\infty} u_n = l$

Jika limit barisan itu ada, maka dikatakan barisan tersebut konvergen, dalam hal lain dinamakan divergen. Suatu barisan hanya dapat konvergen ke satu limit, yaitu limit suatu barisan adalah tunggal.

Contoh 1:

1. Suatu barisan $i, i^2, i^3, \ldots, i^{100}$ disebut barisan berhingga, yang memenuhi untuk $u_n = i^n$, untuk n=1,2,3, … , 100.
2. Suatu barisan $1 + i, \frac{(1+i)^2}{2!}, \frac{(1+i)^3}{3!}, \ldots$ disebut barisan tak berhingga, yang memenuhi $u_n = \frac{(1+i)^n}{n!}$, untuk n = 1,2,3, … , ∞

Contoh 2 :

Jika $u_n = \frac{i^n}{n}$ buktikan $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Bukti :

Ambil $\varepsilon > 0$

Pilih $k(\varepsilon) = N = \frac{1}{\varepsilon}$

Dan n > N

$\forall \varepsilon > 0,\ \ n > N, berlaku\ |u_n - 0| < \varepsilon\ \ maka\ \ \lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Berlaku

$$|u_n - l| = |u_n - 0| = \left|\frac{i^n}{n} - 0\right| = \left|\frac{i^n}{n}\right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} < \varepsilon$$

Sehingga ditemukan suatu $k(\varepsilon) = N = \frac{1}{\varepsilon}$ mengakibatkan limit barisannya ada, dan barisannya akan konvergen ke 0

Jadi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{i^n}{n} = 0$

F. Kekontinuan

Definisi Kontinu

Fungsi $f(z)$ dikatakan kontinu di $z = z_0$ jika

- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ ada
- $f(z_0)$ ada
- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

Dengan kata lain $f(z)$ kontinu di $z = z_0$ jika

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 \ni |z - z_0| < \delta$

berlaku $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Fungi kompleks $f(z)$ dikatakan kontinu pada region D jika $f(z)$ kontinu pada tiap titik z dalam D.

Misalkan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ kontinu di $z_0 = x_0 + iy_0$,

$\Leftrightarrow u(x,y)$ dan $v(x,y)$ kontinu di (x_0,y_0)

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0) \quad dan \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0)$$

.

Sifat-sifat fungsi kontinu	1)	Fungsi konstan kontinu pada bidang kompleks
	2)	Jika *f* dan *g* kontinu pada daerah *D* maka : a) *f+g* kontinu, b) *f-g* kontinu , c) *f.g* kontinu, *d) f/g* kontinu kecuali di $z_0 \in D$ sehingga $g(z_0) = 0$.

Contoh:

Buktikan f(z) = 3z + 2i kontinu di z = i

Bukti :

Fungsi *f(z)* dikatakan kontinu di $z = z_0$ jika

- $\lim_{z \to z_0} f(z)$ ada
- $f(z_0)$ ada
- $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Dengan cara lain dengan menggunakan definisi *f(z)* kontinu di $z = z_0$

jika $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ni |z - z_0| < \delta$

berlaku $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

1) Dengan menggunakan definisi limit:

Ambil $\varepsilon > 0$

Pilih $\delta = \left\{ \frac{\varepsilon}{3} \right\}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |z - i| < \delta \ \ berlaku |f(z) - L| < \varepsilon$

Maka

$|f(z) - f(z_0)| = |(3z + 2i) - 5i| = |3z - 3i| = |3(z - i)| < 3\delta$

Karena $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

Maka diperoleh $3\delta = \varepsilon$ atau $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, mengakibatkan

nilai limitnya ada. Jadi dapat dikatakan juga bahwa

f(z) kontinu di z = i

2) Dengan menggunakan 3 syarat :

- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ ada

  $\lim\limits_{z \to zi} f(3z + 2i) = 3i + 2i = 5i$

- *f(z₀)* ada

  Jika f(z) = 3z + 2i maka f(i) = 3i +2i = 5i (ada)

- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Sehingga dikatakan bahwa f(z) = 3z + 2i kontinu di z = i

G. Deret Tak Berhingga

Misal $u_1, u_2, u_3, \ldots$ adalah suatu barisan

Maka $S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$

dimana S_n adalah jumlah n suku pertama dari barisan u_n

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Jika $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ ada , maka deret tersebut dikatakan konvergen dan S adalah jumlahnya, dalam hal lain deret tersebut dinamakan divergen.

Syarat deret dikatakan konvergen jika $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Contoh :

Buktikan $1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z}$ jika $|z| < 1$

Bukti :

Ubah deret tersebut menjadi rumus S_n

Maka $S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$

$$\begin{array}{rl} zS_n = & +z + z^2 + \cdots + z^{n-1} + z^n \quad (-) \\ \hline (1-z)S_n = & 1 + z^n \end{array}$$

akan diperoleh $S_n = \dfrac{1+z^n}{1-z}$

deret tersebut akan terbukti apabila $z^n = 0$ sehingga $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$

Dari **hal diatas tersebut**

sudah diperoleh bahwa $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$

sehingga akan diperoleh $S_n = \frac{1+z^n}{1-z} = \frac{1+0}{1-z} = \frac{1}{1-z}$

jadi terbukti bahwa

$1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z}$ jika $|z| < 1$

Kompetensi: Soal – Soal latihan untuk diselesaikan !

1. Misalkan w= $f(z) = 2z^2$. Tentukan nilai $f(z_1)$ dan $f(z_2)$, jika $z_1 = -2 + i$ dan z_2 = 4 – 0i.
2. Misalkan w= $f(z) = z^4$. Tentukan nilai w_1 dan w_2, jika $z_1 = -4 + 4\ i$ dan z_2 = 4 – 0i.
3. Misalkan $w = f(z) = z^4$, gambarlah grafik koordinat setelah ditransformasikan dengan titik z = -2 + i dan z = 1 – 3i, dan tunjukkan bagaimana kaitannya bila dinyatakan secara grafik sebelum transformasi dengan sesudah ditransformasikan!
4. Tentukan titik cabang dan garis cabang untuk fungsi:

   a) $w = z^{\frac{1}{5}}$

   b) $w = z^{\frac{1}{6}}$

   (supaya lebih jelas, ilustrasikan dengan menggunakan gambar!)
5. Misalkan *a* dan *b* konstanta kompleks. Gunakan definisi limit untuk membuktikan

   a. $\lim\limits_{z \to z_0} (az + b) = az_0 + b$

   b. $\lim\limits_{z \to z_0} (z^2 + b) = z_0^{\ 2} + b$
6. Tunjukkan bahwa :

   a) Jika $f(z) = -2(z + \frac{1}{3})$ maka $\lim\limits_{z \to i} f(z) = -2i - \frac{2}{3}$.

b) Jika $f(z) = \dfrac{2z-3}{\frac{1}{4}z^3}$ maka $\lim\limits_{z \to i} f(z) = -\dfrac{8i-12}{i}$.

7. Dengan menggunakan definisi limit, buktikanlah!

   a) Jika $f(z) = 5z$ maka $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = 5z_0$.

   c) Jika $f(z) = z^2 - 2z$ maka $\lim\limits_{z \to i} f(z) = -2i - 1$.

8. Buktikan bahwa $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = 4 + 4z_0$

9. Buktikan bahwa jika $f(z) = \dfrac{1}{3z}$ maka $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \dfrac{1}{3z_0}$

10. Apakah fungsi $f(z) = 5 - z^4$ kontinu pada z = -2i.

11. Apakah fungsi $f(z) = \dfrac{2}{z^2 + 1}$ kontinu pada daerah $z = i$

12. Apakah fungsi $f(z) = \dfrac{z^2 + 4}{z - 2i}$ kontinu pada z = z + 3i, dan sebutkan pada titik manakah fungsi tersebut menjadi diskontinu?beri penjelasan!

13. Apakah fungsi $f(z) = \dfrac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i}$ kontinu di z = i

14. Jika $u_n = (1 + \frac{3z}{n^2})$ buktikan $\lim_{n \to \infty} u_n = 1$

15. Jika $u_n = z^n$ buktikan $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$

@ Selamat Mengerjakan@

DAFTAR PUSTAKA

Barron, M dan Young, Karen Romano. 1995. *Ready, Set, Count*. New York:Skylight Press Book.

Churchil, R.V, 2009, Complex Variable & Application 8th edition, Mc Graw-Hill.

Gunawan.2009. *Pengantar Analisis Fourier dan Teori Aproksimasi*.http://personal.fmipa.itb.ac.id/hgunawan/files/2009/02/bab0-b.pdf. [21- 05- 2009].

Jack D, Wilson.1967. *Elementary mathematics A Modern Approach*. New York: Mc. Graw Hill Book Company.

Kusumawinahyu. 2014. *Fungsi Kompleks*. Universitas Brawijaya

Mutaqin. 2008. *Bilangan Kompleks*.Untirta: Jakarta.

Russefendi. 1982. *Dasar Dasar Matematika Modern Untuk Guru*. Bandung: Tarsito.

Spiegel. 1987. *Seri Buku Schaum Teori dan Soal-soal Peubah Kompleks*. Erlangga: Jakarta.

Stupiansky, Nicholas. 1992. *Learning Through Play Math*. New York: Scholastic Inc. early Childhood Division.