Seri : Pendidikan Matematika

Modul 1

BILANGAN KOMPLEKS

(Untuk Kalangan Sendiri)

Oleh:

FX. Didik Purwosetiyono, S.Pd., M.Pd.

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

UNIVERSITAS PGRI SEMARANG

2015

Judul: Modul 1 Bilangan Kompleks

Oleh:

FX. Didik Purwosetiyono, S.Pd., M.Pd.

2014 Program Studi Pendidikan Matematika
Universitas PGRI Semarang

Untuk Kalangan Sendiri

Kompetensi	Pemula		√
	Menengah		√
	Lanjutan		
	Profesional		

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat-Nya, sehingga Modul yang berjudul " **Bilangan Kompleks**" dapat diselesaikan untuk bahan ajar mata kuliah Analisis Kompleks semester VII Prodi Pendidikan Matematika UNIVERSITAS PGRI Semarang. Terselesaikannya penulisan Modul ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin memberikan ucapan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada pihak-pihak yang mendukung terselesaikannya modul ini. Ucapan terima kasih dan penghargaan penulis ucapkan kepada yang terhormat:

1. Ali Shodiqin, S.Si.,M.Si., Ka.Prodi Pendidikan Matematika
2. Pihak-pihak lain yang membantu penulisan modul ini.

Akhirnya semoga bantuan yang telah diberikan kepada penulis, mendapat balasan yang indah dari Tuhan Yang Maha Pemurah. Penulis menyadari tulisan ini masih banyak kekurangan, oleh karena itu segala saran dan kritik akan selalu penulis harapkan demi perbaikan yang lebih sempurna. Semoga modul ini dapat memberikan sumbangan berarti dalam dunia pendidikan. Amin.

Semarang, Agustus 2015

Penulis

DAFTAR ISI

KOMPETENSI

Kompetensi Umum

Mahasiswa memahami Bilangan Kompleks, operasi dan sifat-sifatnya, rumus Euler dan teorema De'Moivre, Fungsi Kompleks dan sifat-sifatnya, Limit Fungsi, Kontinu di suatu titik, Barisan, Turunan, Fungsi Elementer

Deskripsi Mata Kuliah

Mata kuliah ini berisi tentang operasi bilangan kompleks, konsep-konsep dan teorema-teorema dalam Kalkulus dengan Peubah Kompleks, serta dapat menggunakan konsep-konsep dan teorema-teorema itu untuk memecahkan berbagai masalah

Kompetensi Dasar

1. Menjelaskan Definisi bilangan kompleks
2. Menjelaskan modulus bilangan kompleks, sajian bilangan kompleks, dan daerah kompleks
3. Menemukan Rumus Euler, teorema De'Moivre
4. Membuktikan Teorema De'Moivre

Tujuan Pembelajaran

1. Mahasiswa dapat menjelaskan dan menulis definisi bilangan kompleks sifat-sifatnya, mengingat kembali bentuk-bentuk bilangan dan skemanya.
2. Mahasiswa dapat menulis dan menjelaskan modulus bilangan kompleks, sajian bilangan kompleks, dan daerah di bidang kompleks serta operasi bilangan kompleks, dan mengajak siswa membuktikan operasi dan sifat dari bilangan kompleks.
3. Mahasiswa dapat menemukan Rumus Euler dan teorema De' Moivre, serta menerapkan penggunaannya pada penyelesaian.
4. Mahasiswa dapat membuktikan teorema Teorema De'Moivre.

HISTORY

Johann Carl Friedrich Gauss (Lahir: 30 April 1777 Brunswick, Duchy of Brunswick-Wolfenbüttel, Kekaisaran Romawi Suci) adalah matematikawan, astronom, dan fisikawan Jerman yang memberikan beragam kontribusi, termasuk teori bilangan, aljabar, statistik, analisis, geometri diferensial, geodesi, geofisika,elektrostatika, astronomi, dan optik.

Disertasi

Nama Gauss mulai terkenal sehingga merencanakan menggunakan bahan-bahan dalam buku itu untuk disertasi doktoral, namun pihak penerbit menolak. Dicari judul lain sebelum akhirnya didapat judul panjang, Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus revolvi posse yang terbit lebih awal, tahun 1799. Isi tesis doktoral adalah membuktikan theorema dasar aljabar – membuktikan bahwa polinomial pangkat n (kuadrat adalah pangkat 2 dan kubik adalah pangkat 3, quartik adalah pangkat 4 dan seterusnya) mempunyai (hasil) akar pangkat n juga. Hal tersebut baru valid (sahih) apabila perlakuan terhadap bilangan imajiner sama seperti bilangan riil.

Untuk bilangan riil:

x4 + $2x^3 + 9 = 0$ akan mempunyai 4 hasil (bilangan) akar
$x^3 + x^2 + 2x + 4 = 0$ akan **mempunyai** 3 hasil (bilangan) akar.

Untuk bilangan imajiner:

$x^2 + 4 = 0$ tidak dapat diselesaikan apabila bilangan riil yang dipakai.

Hasil yang diperoleh adalah $x = \pm \sqrt{-4}$, atau $x = \pm 2\sqrt{-1}$. Seperti dinyatakan oleh Euler bahwa ekspresi $\sqrt{-1}$ dan $\sqrt{-2}$ tidak dimungkinkan atau merupakan bilangan-bilangan imajiner, karena akar bilangan adalah negatif; sesuatu tidak ada apa-apa (nothing) karena bukan bilangan dan bukan pula bilangan yang lebih besar dari sesuatu tidak ada (nothing).* Gauss menyatakan bahwa bilangan negatif juga termasuk dalam sistim bilangan.

Tidak lama setelah terbitnya Disquisitiones Arithmeticae, Gauss menjadi pengajar dan menulis makalah singkat berjudul The Metaphysics of Mathematics, yang disebut sebagai salah satu uraian singkat dan jelas yang pernah ditulis tentang dasar-dasar matematika. Penyederhanaan ini dimaksudkan pada keyakinan bahwa akan memudahkan mahasiswa belajar matematika.

Sistem bilangan

Gauss membagi bilangan dimulai dari bilangan kompleks. Dari bilangan kompleks itu kemudian diturunkan bilangan-bilangan lain. Bilangan riil, sebagai contoh, sebenarnya adalah bilangan dalam bentuk a + bi, dimana a adalah bilangan riil dan b = nol; bilangan imajiner adalah bilangan kompleks yang mempunyai bentuk sama dengan a = nol dan b adalah bilangan riil. Untuk memudahkan penjelasan diberikan diagram di bawah ini.

Keberadaan bilangan kompleks tidak hanya mempengaruhi aljabar, tapi juga berdampak pada analisis dan geometri. Teori fungsi dari bilangan kompleks kemudian dikembangkan; geometri diferensial [angka] mutlak dan analisis vektor – sangat vital bagi sains modern – berkembang sehingga dikenal bilangan-bilangan setengah-riil dan setengah-imajiner.

Bilangan kompleks dapat ditambah, dikurang, dikali, dibagi, dipangkat atau dicari hasil akarnya dalam kasus dimana bilangan kompleks dalam bentuk a + bi – meskipun a, b atau keduanya mungkin sama dengan nol. Bilangan baru dapat dibuat untuk melakukan operasi terhadap bilangan-bilangan kompleks. Sistem bilangan aljabar lama sekarang tertutup, untuk penggunaan bilangan-bilangan kompleks, semua bentuk persamaan dapat diselesaikan dan semua jenis operasi dapat dilakukan. Prestasi penutupan sistem matematika ** ini adalah misi manusia terus mencari-cari sejak jaman Pythagoras.

Awal Penemuan dan Pengembangan Bilangan Imajiner

Sejarah penemuan bilangan imaginer (*imaginary numbers*) dimulai pada tahun 1545 ketika seorang matematikawan berkebangsaan Italia, Girolamo Cardano, menerbitkan buku yang berjudul *Ars Magna*, di mana pada buku tersebut Cardano untuk pertama kalinya menyatakan solusi aljabar terhadap persamaan kubik yang berbentuk $z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$. Persamaan ini untuk kemudian dikenal sebagai persamaan kubik umum. Solusinya diselesaikan oleh Cardano dengan terlebih dahulu mereformulasi persamaan kubik tersebut ke dalam persamaan kubik lain yang tidak memiliki suku yang variabelnya dikuadratkan, yaitu yang disebut dengan persamaan *depressed cubic*. Selanjutnya, Cardano menggunakan formula Ferro-Tartaglia untuk memecahkan persaamaan *depressed cubic*.

Selain sebagai matematikawan, Cardano juga dikenal sebagai fisikawan dan astrologer yang bekerja kepada para pembesar Eropa. Ia juga dikenal sebagai pejudi yang senang melakukan perjalanan jauh dan pesta-pora. Namun di tengah-tengah kesibukannya itu, karier matematika Cardano jauh lebih cemerlang sebagai aktor utama *Renaissance*. Di sisi lain, ia telah memberikan kontribusi penting terhadap perkembaangan awal ilmu probabilitas. Atas dasar kontribusi ini, ia telah dianggap sebagai bapak Ilmu Probabilitas. Selain *De Vita Properia Liber* yang berisi risalah ilmu probabilitas, ia juga menulis *Ars Magna* (Seni Agung). Di buku *Ars Magna* inilah Cardano mulai menyadari posibilitas keberadaan bilangan imajiner yang pertama kali muncul sebagai efek dari pengembangan penyelesaian persamaan kubik tadi.

Persamaan kubik (*cubic equations*) itu sendiri telah dipelajari oleh murid-murid Euclide di Alexandria. Archimedes (287 – 212 SM), misalnya, menemukan bahwa ketika sebuah bola dipotong oleh suatu bidang sehingga salah satu bagiannya memiliki volume dua kali bagian yang lainnya, maka cara bola tersebut dipotong mengarah ke persamaan kubik berbentuk : $z^3 + 3z + 3/2 = 0$.

Memasuki awal masa *Renaissance*, para matematikawan Muslim telah banyak mewariskan cara menyelesaikan persamaan matematika baik dengan pendekatan aritmetika maupun melalui metode geometris. Namun matematikawan pada masa itu belum mampu untuk mendapatkan solusi aljabar terhadap persamaan kubik. Omar Khayyam (1050 – 1123) sebagai contoh memberikan ilustrasi terhadap pemecahan masalah persamaan kubik, namun hanya sampai di akar bilangan positif. Notasi terhadap akar dua bilangan negatif masih terlalu jauh dikonsepsikan mengingat konsep bilangan negatif sendiri masih asing waktu itu, dan penggunaannya dalam matematika masih dicurigai. Para matematikawan di masa itu agaknya masih sulit untuk menemukan korespondensi bilangan negatif dengan realitas fisis, meskipun secara sistematis penggunaannya dalam matematika telah dipresentasikan oleh Brahmagupta pada tahun 628.

Hingga pada tahun 1494, Luca Pacioli pun mengumumkan bahwa tidak ada solusi aljabar umum terhadap persamaan kubik. Orang pertama yang kemudian diketahui menemukan solusi aljabar terhadap persamaan *depressed cubic* adalah Scipio del Ferro (1465-1526), yaitu seorang guru besar di University of Bologna, Italia. Namun sayang, Ferro merahasiakan temuan ini untuk beberapa waktu, hingga ia memberitahukan temuan itu kepada Antonio Fior di saat menjelang wafatnya.

Setelah Cardano mereformulasi persamaan kubik umum menjadi bentuk *depressed cubic equation*, masalah selanjutnya adalah bagaimana menyelesaikan persamaan *depressed cubic*? Untungnya solusi persamaan *depressed Cubic* telah diketahui oleh teman Cardano yang bernama Niccolo Fontana yang dikenal juga dengan nama Tartaglia ("Si Gagap"), karena bicaranya gagap. Dalam suatu kontes, Nicollo Fontana ditantang oleh Fior untuk memecahkan permasalahan persamaan kubik. Namun diluar dugaan, Tartaglia berhasil memecahkannya dengan solusi yang lebih umum dari solusi yang diketahui Fior. Di lain waktu, Cardano membujuk Tartaglia agar memberitahukan temuannya itu, dan Tartaglia pun memberitahukannya dengan syarat agar temuan itu tidak dipublikasikan. Cardano menyetujuinya dan bersumpah tidak akan mempublikasikannya. Namun Cardano melanggar janjinya, ketika pada tahun 1543 ia menemukan paper yang ditulis oleh Ferro untuk topik persamaan kubik. Sejak itu munculah keinginan dalam dirinya itu untuk memformulasikan penanganan yang lebih lengkap terhadap persamaan kubik umum. Lalu kemudian ia menuliskan hasilnya dalam *Ars Magna*.

Maka dengan upaya ini Cardano bisa menangani persamaan kubik umum melalui koneksi persamaan *depressed cubic* dan solusinya dari Niccolo Fontana yang juga telah ditemukan 30 tahun sebelumnya oleh Scipio del Ferro.

Formula rahasia ini kemudian disebut formula Ferro-Tartaglia.

Langkah-langkah penanganannya adalah sebagai berikut. Untuk menurunkan persamaan kubik yang berbentuk :

$z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ .... (1)

Cardano memulainya dengan mensubstitusikan $z = x - \left(\frac{1}{3}\right) a_2$ terhadap persamaan (1), yang menghasilkan bentuk :

$x^3 + bx + c = 0$ .... (2)

Dengan b dan c yang bersesuaian :

$b = a_1 - (\frac{1}{3}) a_2^2$

$c = a_0 - \left(\frac{1}{3}\right) a_1 a_2 + \left(\frac{1}{27}\right) 2a_2^3$

Persamaan (2) disebut *depressed cubic equation*.

Jadi, apabila nilai x pada persamaan *depressed cubic* ditemukan maka solusi terhadap persamaan kubik umum juga bisa ditemukan. Untungnya, solusi terhadap persamaan *depressed cubic* di atas telah didapatkan Cardano dari Tartaglia. Bentuk solusinya adalah seperti ini :

$$x = \sqrt[3]{\frac{-c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}$$ .... (3)

Dengan formula Ferro-Tartaglia ini, Cardano mendapatkan solusi terhadap persamaan kubik umum.

Pengembangan dari penyelesaian persamaan kubik dengan koneksi persamaan *depressed cubic* serta formula Ferro-Tartaglia selanjutnya memberi legitimasi bagi posibilitas eksistensi bilangan imajiner. Meskipun problem matematika yang melibatkan akar bilangan negatif sebenarnya sudah disadari sebelumnya, sebagai misal dari persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0$ yang solusinya $x = \pm\sqrt{-1}$. Namun pada masa Cardano konsep bilangan negatif masih diperlakukan dengan penuh curiga mengingat pada saat itu masih sulit untuk menemukan kesesuaiannya dengan realitas fisis. Sehingga munculnya akar dua dari bilangan negatif menambah keasingan bagi bilangan itu sendiri. Cardano sendiri mengatakan proses matematika dengan

$\sqrt{-1}$melibatkan "mental tortures," dan ia pun menyimpulkan, "as subtle as it would be useless."

Representasi Geometris dan Aljabar Bilangan Imajiner

Pikiran liar Bombelli merangsang orang dalam beberapa dekade berikutnya untuk mulai mempercayai keberadaan bilangan imajiner, dan sebagian ahli matematika berupaya agar keberadaannya menjadi lebih jelas, lebih dimengerti dan diterima. Salah satu cara agar keberadaannya diterima dengan mudah adalah dengan menyatakannya dalam bentuk grafik dua dimensi. Dalam kasus ini, sumbu x adalah untuk bilangan riil, dan sumbu y untuk bilangan imajiner.

Ide pertama untuk menyatakan bilangan kompleks dalam bentuk geometris bersumber dari John Wallis pada tahun 1673. Sayangnya ekspresi geometris awal terhadap bilangan kompleks mengarah ke konsekuensi yang tidak diharapkan, yaitu $-\sqrt{-1}$dinyatakan pada titik yang sama dengan $\sqrt{-1}$. Namun setidaknya representasi geometris ini memberikan konsepsi baru terhadap bilangan kompleks sebagai "titik pada bidang." Upaya ini kemudian diteruskan oleh Caspar Wessel, Abbe Buee dan Jean Robert Argand.

Pada tahun 1732, matematikawan berkebangsaan Swiss, Leonhard Euler mengadopsi gagasan representasi geometris untuk solusi persamaan berbentuk $x^n - 1 = 0$dan menyatakannya dalam bentuk $\cos(\theta) + \sqrt{-1}\sin(\theta)$. Euler juga adalah orang pertama yang menggunakan simbol i untuk $\sqrt{-1}$. Di sisi lain, dalam risalahnya Euler menulis, "*...for we may assert that they are neither nothing, not greater than nothing, nor less than nothing, which necessarily renders them imaginary or impossible.*"

Jelasnya, setelah ia memperlakukan bilangan imajiner secara matematis dan formal, dan menunjukan bahwa i mempunyai validitas matematis, pada akhirnya harus ia katakan bahwa eksistensi i dalam realitas adalah *impossible*, atau paling tidak "mental reality" belum mampu meletakan status ontologisnya.

Dua matematikawan lain yang turut memberikan sumbangan penting terhadap pengembangan bilangan imajiner adalah Augustin-Louis Cauchy (1789—1857) dan Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855). Cauchy menemukan beberapa teorema penting dalam bilangan kompleks, sedangkan Gauss menggunakan bilangan kompleks sebagai peralatan penting dalam pembuktian teorema fundamental dalam aljabar, yaitu terbukti bahwa melalui bilangan kompleks, terdapat solusi untuk setiap persamaan polinomial berderajat n. Dalam paper yang dikeluarkan tahun 1831, Gauss menyatakan representasi geometris untuk bilangan kompleks x + iy dengan titik (x, y) dalam bidang kordinat. Ia juga menjelaskan operasi-operasi aritmetika dengan bilangan kompleks ini.

Atas dasar usaha Gauss, bilangan kompleks mulai disadari legitimasinya. Sebagian ahli matematika meyakini keberadaan bilangan kompleks dan berusaha memahaminya, sebagian yang lain tidak, dan sebagian lagi meragukannya. Pada tahun 1833 William Rowan Hamilton menyatakan bilangan kompleks sebagai pasangan bilangan (a,b). Kendati kelihatannya hanya sebuah ekspresi lain alih-alih a + ib, dengan maksud agar lebih mudah ditangani melalui aritmetika. Usaha ini memicu Karl Weierstrass, Hermann Schwarz, Richard Dedekind, Otto Holder, Henri Poincare, Eduard Study, dan Sir Frank Macfarlane Burnet untuk merumuskan teori umum tentang bilangan kompleks. Dan atas upaya August Möbius aplikasi bilangan kompleks ke dalam geometri menjadi lebih jelas bentuk-bentuk formula transformasinya.

MODUL 1 BILANGAN KOMPLEKS

1. Menjelaskan Definisi bilangan kompleks
2. Menjelaskan modulus bilangan kompleks, bilangan kompleks, dan daerah kompleks
3. Menemukan Rumus Euler, teorema De'Moivre
4. Membuktikan Teorema De'Moivre

A. Bilangan Kompleks

Tidak ada bilangan real x yang memenuhi persamaan suku banyak $x^2 + 1 = 0$. Untuk memperbolehkan adanya jawaban dari persamaan ini dan yang sejenisnya, maka himpunan bilangan kompleks diperkenalkan.

Mengapa perlu bilangan kompleks ?

$x^2 - 1 = 0$ mempunyai penyelesaian dengan $x \in \Re$.

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ tidak mempunyai penyelesaian,

jika $x \in \Re$.

(Mengapa pada kasus ini tidak diketahui penyelesaiannya? Coba anda jelaskan!)

Sehingga perlu mengidentifikasi suatu bilangan dimana persamaan $x^2 + 1 = 0$ mempunyai penyelesaian.

Selanjutnya perlu dikembangkan suatu sistem bilangan yaitu bilangan kompleks untuk menyelesaikan persoalan.

Kita dapat memandang suatu bilangan kompleks sebagai bilangan yang berbentuk a + bi dimana a,b$\in R$ dan $i \in I$, bentuk i dinamakan satuan khayal *(imaginary unit)* bersifat $i^2 = -1$. Jika z = a + bi, maka a dinamakan bagian riil dari z dan b dinamakan bagian khayal dari z dan berturut-turut dinyatakan dengan Re {z} dan Im {z}. Lambang z dapat digunakan untuk suatu anggota dari himpunan bilangan kompleks dan dinamakan peubah/ fungsi kompleks.

Definisi Bilangan Kompleks	Bilangan kompleks z : merupakan pasangan berurut (x, y) dengan x , $y \in \Re$. ditulis : $z = (x, y)$. merupakan bilangan yang berbentuk $x + iy$ dengan x , $y \in \Re$ dan $i = (0,1) = \sqrt{-1}$. ditulis : $z = x + iy$.

Jika $z = (x, y) = x + iy$ maka

$x = \text{Re}\,(z)$ = bagian riil z,

$y = \text{Im}\,(z)$ = bagian imajiner z,

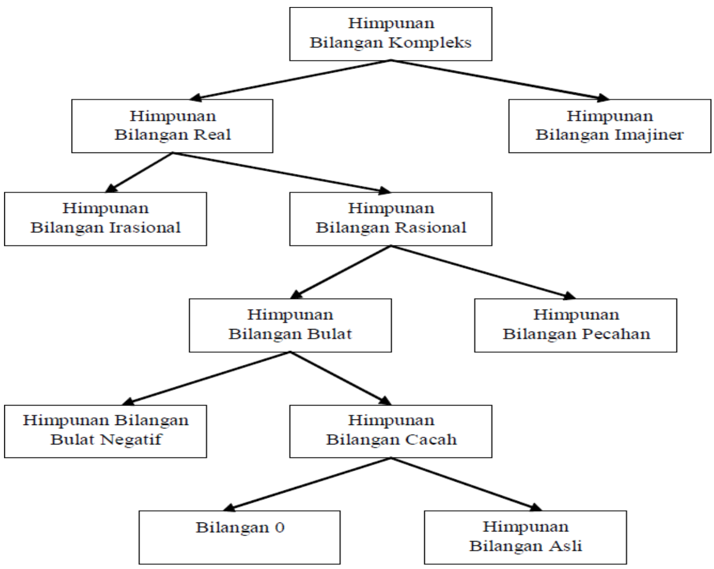
i = satuan imajiner dan $i^2 = -1$.

Diperoleh

$$z = x + iy$$

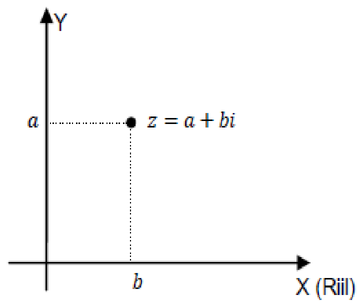
$$\mathrm{Re}(z) \quad \mathrm{Im}(z)$$

Perhatikan bagan berikut ini! Menurut anda apakah skema bilangan yang anda kenal sudah sesuai dengan sekema tersebut? Jika tidak beri alasannya!



Gambar 1 Bagan Bilangan

Bilangan kompleks merupakan pasangan berurut (x, y), sehingga secara geometri dapat disajikan sebagai titik (x, y) pada bidang kompleks (bidang *Argand*), dengan sumbu x (sumbu riil) dan sumbu y (sumbu imajinair). Selain itu, bilangan kompleks $z = x + iy$ juga dapat disajikan sebagai vektor dalam bidang kompleks dengan titik pangkal pada titik asal dan ujung vektor merupakan titik (x, y).



Gambar 2. Koordinat di bidang kompleks

Dua bilangan kompleks *a + bi* dan *c + di* dikatakan **sama** *jika dan hanya jika a = c* dan *b = d*. Kita dapat memandang bilangan riil sebagai bagian dari himpunan bilangan kompleks dengan *b = 0*. Jadi bilangan kompleks *0 + 0i* dan -*3 + 0i* berturut-turut menyatakan bilangan 0 dan -3. Jika *a = 0*, maka bilangan kompleks *0 + bi* dapat ditulis hanya dengan *bi* dinamakan bilangan khayal sejati.

Kompleks sekawan atau disingkat **kawan** dari suatu bilangan kompleks *a + bi* adalah bilangan *a - bi*. Kompleks sekawan suatu bilangan kompleks z seringkali dinyatakan sebagai $\bar{z}$ (*z bar*).

Operasi-operasi aljabar bilangan kompleks

Operasi aljabar pada bilangan kompleks sesuai dengan operasi aljabar pada bilangan riil.

Misalkan $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$.

a. Penjumlahan : $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$

b. Pengurangan : $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)$

c. Perkalian :

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

d. Pembagian :

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}, \quad z_2 \neq 0$$

Perlu diperhatikan :

1. $-z$ (negatif z).

   Jika $z = x + iy$ maka $-z = -x - iy$.

2. z^{-1} (kebalikan z)

   Jika $z = x + iy$ maka $z^{-1} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - i\,\dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

   (Coba anda tunjukkan sebagai latihan!)

Sifat operasi aljabar adalah sebagai berikut

a. Hukum komutatif

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, dan $z_1 z_2 = z_2 z_1$

b. Hukum asosiatif

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

$(z_1 z_2)\, z_3 = z_1\,(z_2 z_3)$

c. Hukum distributif

$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

d. Elemen netral dalam penjumlahan ($0 = 0 + 0\,i$)

$z + 0 = 0 + z = z$

e. Elemen netral dalam perkalian ($1 = 1 + 0\,i$)

$z\,.1 = 1.\,z = z$

Dasar-Dasar Aksiomatik Sistem Bilangan Kompleks

Dari sudut pandang logika dimungkinkan untuk mendefinisikan suatu bilangan kompleks sebagai suatu pasangan terurut (a,b) dari bilangan riil a dan b terhadap definisi operasi tertentu, yang kemudian ternyata setara dengan yang di atas. Definisi ini adalah sebagai berikut, dimana semua huruf menyatakan bilangan riil.

A. Kesamaan

(a,b) = (c,d) jika dan hanya jika a = c , b = d

B. Jumlah

(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)

C. Hasil kali

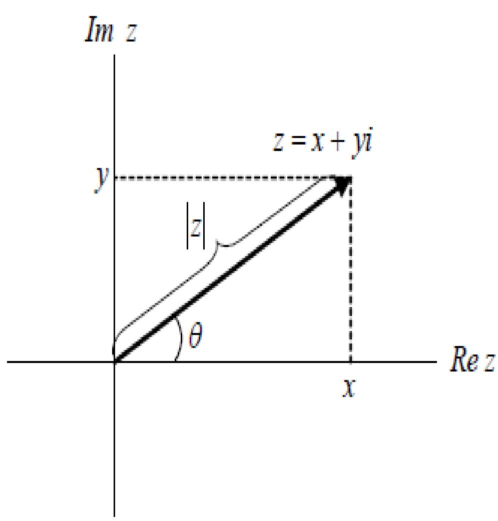
(a,b).(c,d) = (ac – bd, ad + bc)

m (a,b) = (ma, mb), *dengan m skalar*

B. **Nilai Mutlak/ Modulus dan Sekawan/ Konjugate pada bilangan kompleks**

Penyajian bilangan kompleks sebagai vektor dapat digunakan untuk mengembangkan konsep nilai mutlak bilangan riil pada bilangan kompleks.

Definisi modulus (nilai mutlak)	Modulus (nilai mutlak) $z = x + iy$ didefinisikan sebagai bilangan riil non negatif $\sqrt{x^2 + y^2}$ dan ditulis sebagai Modulus $z = \lvert z \rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Gambar 3. Modulus bilangan kompleks

Secara geometri, $|z|$ menyatakan jarak antara titik (x, y) dan titik asal. Misalkan $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$. Jarak antara z_1 dan z_2 didefinisikan dengan :

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\ .$$

Selanjutnya, persamaan $|z - z_0| = R$ menyatakan bilangan kompleks z yang bersesuaian dengan titik-titik pada lingkaran dengan pusat z_0 dan jari-jari R.

Misal $z = x + iy$, $x, y \in \Re$, i^2 = -1

Modulus dari z dinyatakan dengan "$|z|$" dan didefinisikan sebagai;

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Contoh 1:

Jika z = $5 + 5i$

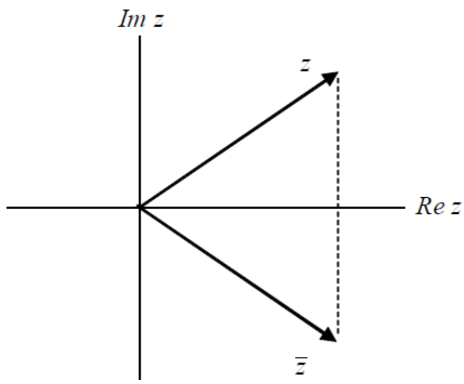
Maka $|z|$ = $|5 + 5i|$ = $\sqrt{5^2 + 5^2}$ = $5\sqrt{2}$

Sehingga modulus dari $5 + 5i$ adalah $5\sqrt{2}$

Sekawan pada Bilangan Kompleks

Definisi bilangan kompleks sekawan	Bilangan kompleks sekawan dari $z = x + iy$ didefinisikan sebagai bilangan kompleks $\bar{z} = x - iy$.

Secara geometri, bilangan kompleks sekawan $\bar{z} = x - iy$ dinyatakan dengan titik $(x,-y)$ dan merupakan pencerminan titik (x, y) terhadap sumbu riil.



Gambar 4. Sekawan bilangan kompleks

Dari Gambar di atas Konjugate bilangan kompleks z = x+yi adalah $\bar{z}$ = x-yi, dimana Konjugate z tidak lain adalah pencerminan z terhadap sumbu Re z.

Contoh 2

a. $| 3 - 4i | = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.

b. $| z + 3 - |3i = 2$ menyatakan lingkaran dengan pusat $z_0 = (3,-3)$ dan jari-jari $R = 2$.

c. Jika $z = 3 - 4i$ maka $\bar{z} = 3 + 4i$

Sifat Modulus dan Bilangan Kompleks Sekawan

a. $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$

b. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

c. $\overline{\overline{z}} = z$

d. $|\overline{z}| = |z|$

e. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

f. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

g. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

h. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

i. $z\,\overline{z} = |z|^2$

j. $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

k. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Contoh 3:

Akan dibuktikan $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Bukti :

Misal $z_1 = x_1 + iy_1$, dan $z_2 = x_2 + iy_2$

Maka $|z_1| = |x_1 + iy_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$,

$|z_2| = |x_2 + iy_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

$$|z_1 + z_2| = |(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)|$$

$$= |(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i|$$

$$= \sqrt{(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2)}$$

$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2x_1x_2 + 2y_1y_2}$$

Akan dibuktikan bahwa $\left|z_1 + z_2\right| \leq \left|z_1\right| + \left|z_2\right|$

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2x_1x_2 + 2y_1y_2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2x_1x_2 + 2y_1y_2 \leq (x_1^2 + y_1^2) + 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} + (x_2^2 + y_2^2)$$

$$2\ (x_1x_2 + y_1y_2) \leq 2\ \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$(x_1x_2 + y_1y_2) \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$x_1^2x_2^2 + 2x_1y_1.x_2y_2 + y_1^2y_2^2 \leq x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2$$

$$2x_1y_1.x_2y_2 \leq x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2$$

$$x_1^2y_1^2 + y_1^2x_2^2 - 2x_1y_1.x_2y_2 \geq 0$$

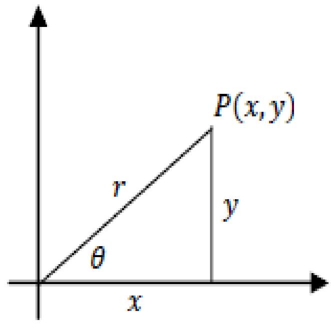
$$(x_1y_2 - y_1x_2)^2 \geq 0$$

Bentuk tersebut memenuhi jadi terbukti bahwa

$\left|z_1 + z_2\right| \leq \left|z_1\right| + \left|z_2\right|$

C. Bentuk Kutub Bilangan Kompleks

Perhatikanlah gambar berikut.



Gambar 5. Bentuk kutub bilangan kompleks

Jika P adalah suatu titik dibidang kompleks yang dikaitkan dengan bilangan kompleks *(x, y)* atau $x + iy$, maka diperoleh sebagai berikut.

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Sehingga bentuk $z = x + iy$ menjadi :

$$z = r \cos \theta + i\, r \sin \theta$$

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z = r \, Cis\, \theta$$

(Bentuk kutub bilangan kompleks)

Nilai argumen dari z (arg z) tidak tunggal tetapi merupakan kelipatan 2π (sesuai dengan kuadran dimana titik z berada).

Sedangkan, nilai utama (*principal value*) dari $\arg z$ ditulis $Arg\ z$ dengan $-\pi < Arg\ z \le \pi$ adalah tunggal.

Jelas, $\arg z = Arg\ z + 2n\pi \quad , \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

Perlu diperhatikan bahwa :

$$\begin{aligned} z &= r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \\ &= r\ cis\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= r\left(\cos\theta - i\sin\theta\right) \\ &= r\ cis\left(-\theta\right) \end{aligned}$$

$$\arg z = \theta$$

$$\arg \bar{z} = -\theta$$

Contoh 1:

Nyatakan bilangan kompleks $z = 2 + 2\sqrt{3}\ i$ dalam bentuk kutub!

Penyelesaian :

$$r = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\theta = arc.\ tan\ \frac{2\sqrt{3}}{2} = 60^o$$

Jadi, bentuk kutub dari $z = 2 + 2\sqrt{3}\ i$ adalah

$z = 4\ (Cos\ 60^o + i\ Sin\ 60^o)$

Contoh 2:

Nyatakan bentuk kutub *z = 4 (Cos 30^o + i Sin 30^o)* dalam bentuk bilangan kompleks !

Penyelesaian :

$x = r \cos \theta = 4 \text{ Cos } 30^o = 2\sqrt{3}$

$y = r \sin \theta = 4 \text{ Sin } 30^o = 2$

Jadi bilangan kompleks dari

$z = 4 (\text{Cos } 30^o + i \text{ Sin } 30^o)$ adalah

$z = 2\sqrt{3} + 2i$

Operasi aljabar bentuk kutub dan sifat argumen

Misalkan $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$ dan $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$ dengan $r_1 = |z_1|$, $r_2 = |z_2|$, $\arg z_1 = \theta_1$, $\arg z_2 = \theta_2$.

a. Perkalian

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \, cis\,(\theta_1 + \theta_2)$$
$$= |z_1 z_2| \, cis\,(\theta_1 + \theta_2)$$
$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 .$$

b. Pembagian $(z_2 \neq 0)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} cis(\theta_1 - \theta_2) = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| cis(\theta_1 - \theta_2).$$
$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 .$$

c. Invers sebarang bilangan kompleks $z = r e^{i\theta}$ yaitu $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} cis(-\theta)$.

$$\arg \frac{1}{z} = -\arg z$$

Contoh 3 :

Diketahui $z = \dfrac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{-1+i}$. Tentukan bentuk kutub dari z dan nilai $\bar{z}$.

Penyelesaian :

Menggunakan sifat argumen diperoleh :

$$z = \frac{(\sqrt{2}\ cis\ \frac{\pi}{4})(2\ cis\ \frac{\pi}{3})}{\sqrt{2}\ cis\ \frac{3\pi}{4}} = 2\ cis\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= 2\ cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

dan $\bar{z} = 2\ cis\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

D. Rumus De'Moivre

Jika $z_1 = x_1 + i\,y_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)$

dan $z_2 = x_2 + i\,y_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$

kita dapat menunjukkan bahwa :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left\{\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots *)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left\{\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right\}$$

Suatu perumuman dari *) memberikan :

$$z_1 z_2 \ldots\ldots z_n = r_1 r_2 \ldots\ldots r_n \left\{\cos\left(\theta_1 + \theta_2 + \ldots\ldots + \theta_n\right) + i\sin\left(\theta_1 + \theta_2 + \ldots\ldots + \theta_n\right)\right\}$$

dan jika $z_1 = z_2 = \ldots\ldots = z_n = z$, ini menjadi

$$z^n = \left\{r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\right\}^n = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$$

yang seringkali disebut teorema ***De' Moivre*** atau

Bentuk pangkat

Misalkan $z = r\,e^{i\theta}$, maka menggunakan aturan pangkat seperti pada bilangan riil diperoleh

$$z^n = (r\,e^{i\theta})^n = r^n\,e^{i\,n\theta},$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Rumus Moivre

Jika $r = 1$, maka bentuk pangkat di atas menjadi $z^n = (e^{i\theta})^n = e^{i\,n\theta}$, atau

$$(e^{i\theta})^n = e^{i\,n\theta},$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Selanjutnya dapat ditulis dalam bentuk

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

yang disebut ***Rumus Moivre***.

Contoh:

Hitunglah $(-5 + i\sqrt{75})^4$

Jawab:

Misal $z = -5 + i\sqrt{75}$ maka $r = |z| = \sqrt{25 + 75} = 10$ dan

Arc $z = \arctan\left(\frac{\sqrt{75}}{-5}\right) = \frac{2}{3}\pi$; $z = 10\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

Sehingga:

$$z^4 = 10^4\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^4$$

$$= 10^4\left(\cos\frac{8}{3}\pi + i\sin\frac{8}{3}\pi\right)$$

$$= 5.10^4\left(\cos 60 + i\sin 60\right)$$

$$= 5.10^4\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 25.10^3\left(1 + \sqrt{3}\, i\right)$$

E. Rumus Euler dan bentuk Eksponen bilangan kompleks

Selain dalam bentuk umum $z = x + iy$ dan bentuk kutub $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, bilangan kompleks z juga dapat dinyatakan dalam bentuk eksponen.

Bentuk eksponen bilangan kompleks $z = x + iy$ yaitu $z = r\,e^{i\theta}$ dengan $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ dinamakan rumus Euler.

Misalkan $z_1 = r_1\, e^{i\theta_1}$ dan $z_2 = r_2\, e^{i\theta_2}$.

a. Perkalian

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\, e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2\, e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

b. Pembagian

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

c. Invers sebarang bilangan kompleks $z = r\,e^{i\theta}$ yaitu

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}\, e^{-i\theta}$$

F. Akar Bilangan Kompleks

Bentuk akar

Misalkan $z = r\ cis\theta$, akar pangkat n dari bilangan kompleks z ditulis $z^{\frac{1}{n}}$ atau $\sqrt[n]{z}$. Jika diberikan bilangan kompleks $z \neq 0$ dan n bilangan bulat positif, maka diperoleh n buah akar untuk $z^{\frac{1}{n}}$ yaitu

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\ \sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right],$$

Untuk $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Secara geometri, n buah akar tersebut merupakan titik-titik sudut segi n beraturan pada suatu lingkaran dengan pusat titik O dan jari-jari $\sqrt[n]{r}$.

Contoh 1:

Tentukan semua akar dari $\sqrt[3]{-8i}$ dan gambarkan akar-akar tersebut dalam bidang kompleks.

Penyelesaian :

Misalkan $z = -8i$,

maka $r = |z| = 8$

dan $\theta = arctg\frac{-8}{0} = -\frac{\pi}{2}$,

$$z_k = \sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8}\left[\cos\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\ \sin\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right]$$

$k = 0, 1, 2.$

Sehingga diperoleh

$$z_0 = \sqrt[3]{8}\left[\cos\frac{-\frac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+}{3}\right] = 2\left[\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right] = \sqrt{3} - i$$

$$z_1 = 2\left[\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})\right] = 2i\,.$$

$$z_2 = 2\left[\cos(\frac{7\pi}{6}) + i\sin(\frac{7\pi}{6})\right] = -\sqrt{3} - i\,.$$

Contoh 2:

Tentukan setiap akar yang diberikan berikut dan letaknya pada bidang kompleks $(-1+i)^{\frac{1}{3}}$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$(-1+i)^{\frac{1}{3}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left\{cos\frac{\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)}{3} + i\ sin\frac{\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)}{3}\right\}$$

Untuk

$$k = 0,\ z_1 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$k = 1,\ z_1 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right)$$

$$k = 2,\ z_1 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{19\pi}{4} + i\sin\frac{19\pi}{4}\right)$$

Contoh 3: Tentukan setiap akar yang diberikan berikut dan letaknya pada bidang kompleks $(2\sqrt{3}-2i)^{\frac{1}{2}}$

$$r=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+(-2)^2}=\sqrt{2}$$

$$\sin\theta=-\frac{2}{\sqrt{4}},\quad \theta=330^\circ$$

$$\cos\theta=\frac{2\sqrt{3}}{4},\quad \theta=330^\circ$$

$$\left(2\sqrt{3}-2i\right)^{\frac{1}{2}}=(4)^{\frac{1}{2}}\left\{cos\frac{(330^\circ+2k\pi)}{2}+i\,sin\frac{(330^\circ+2k\pi)}{2}\right\}$$

Untuk

$$k=0,\ z_1=2(\cos 165^\circ+i\sin 165^\circ)$$

$$k=1,\ z_1=2(\cos 345^\circ+i\sin 345^\circ)$$

Contoh 4:

Tentukan setiap akar yang diberikan berikut dan letaknya pada bidang kompleks $(-1+i)^{\frac{1}{3}}$

$$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \theta=\frac{3\pi}{4}$$

$$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \theta=\frac{3\pi}{4}$$

$$(-1+i)^{\frac{1}{3}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left\{ cos \frac{\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)}{3} + i \; sin \frac{\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)}{3} \right\}$$

Untuk

$$k = 0, \; z_1 = 2^{\frac{1}{6}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

$$k = 1, \; z_1 = 2^{\frac{1}{6}} \left(\cos \frac{11\pi}{4} + i \sin \frac{11\pi}{4}\right)$$

$$k = 2, \; z_1 = 2^{\frac{1}{6}} \left(\cos \frac{19\pi}{4} + i \sin \frac{19\pi}{4}\right)$$

Contoh 5:

Tentukan setiap akar yang diberikan berikut dan letaknya pada bidang kompleks $\left(2\sqrt{3} - 2i\right)^{\frac{1}{2}}$

$$r = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{2}$$

$$\sin\theta = -\frac{2}{\sqrt{4}}, \quad \theta = 330^\circ$$

$$\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4}, \quad \theta = 330^\circ$$

$$\left(2\sqrt{3} - 2i\right)^{\frac{1}{2}} = (4)^{\frac{1}{2}} \left\{ cos \frac{(330^\circ + 2k\pi)}{2} + i \; sin \frac{(330^\circ + 2k\pi)}{2} \right\}$$

Untuk

$$k = 0, \; z_1 = 2(\cos 165^\circ + i \sin 165^\circ)$$

$$k = 1, \; z_1 = 2(\cos 345^\circ + i \sin 345^\circ)$$

G. Persamaan dan Pertidaksamaan Bilangan Kompleks

Konsep-konsep geometri analitik bidang berkorespondensi dengan bilangan kompleks dapat digambarkan melalui bentuk kompleks persamaan pada bidang koordinat kurvalinear. Untuk menentukan tempat kedudukan titik-titik yang memenuhi dapat kita tentukan dengan menggambar ilustrasi grafik persamaan atau pertidaksamaan pada bidang koordinat kurvalinear.

Contoh :

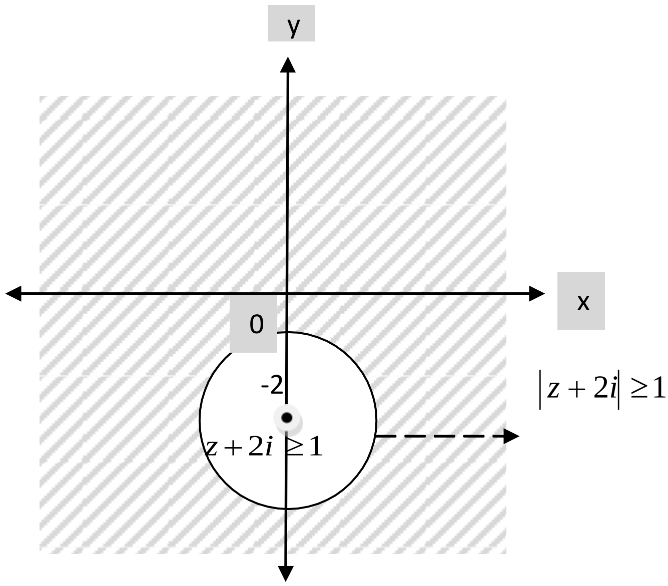
Tentukan tempat kedudukan titik-titik dalam bidang yang memenuhi $|z+2i| \geq 1$ dengan menggambarkan dalam koordinat kurvalinear.

<u>Pembahasan</u>

$|z+2i| \geq 1$

Maka ;
$$|z+2i| \geq 1$$
$$|x+iy+2i| \geq 1$$
$$|x+i(y+2)| \geq 1$$
$$\sqrt{x^2+(y+2)^2} \geq 1$$
$$x^2+(y+2)^2 \geq 1$$

Gambar grafik dari pertidaksamaan, adalah sebagai berikut ;



Gambar 6. Ilustrasi gambar pertidaksamaan $|z+2i| \geq 1$

H. Persamaan Suku Banyak

Penyelesaian persamaan suku banyak berbentuk

$a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0$

dimana $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n$ bilangan kompleks yang diketahui dan *n* bilangan bulat positif. Persamaan suku banyak memiliki n akar kompleks. Jika $z_1, z_2, \ldots, z_n$ adalah n buah akar, maka

$a_0(z-z_1)(z-z_2) \ldots (z-z_n) = 0$

dinamakan bentuk pemfaktoran persamaan suku banyak.

Contoh:

Selesaikan $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$

Penyelesaian:

$z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$

Setelah difaktorkan diperoleh

$(z-2)(z-1)^2(z^2+2z+2) = 0$

Maka

$z_1 = 2, z_2 = 1, z_3 = 1, z_4 = -1 + i, dan\ z_5 = -1 - i$

Kompetensi 1: Soal – Soal latihan untuk diselesaikan !

1. Jika $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 - 2i$, $z_3 = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\, i$, hitunglah !

   a. $2z_1 + 4z_2$

   b. $z_1^{\,3} + 4z_2 - 3z_1^{\,2} + 4$

   c. $\left| 3z_1 - \frac{1}{2} z_2 \right|$

   d. $\left| \frac{z_2 + 2z_3}{2 - z_2} \right|$

2. Tentukan nilai x dan nilai y sehingga $3x + 3iy - i2x + 3y = 3 + 6i$

3. Pembuktian sifat – sifat Modulus :

   a. $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$

   b. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

   c. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

   d. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

   e. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$

   f. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

   g. $z\,\overline{z} = |z|^2$

   h. $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

   i. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

4. Tentukan $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$ dan $\overline{z}$ untuk

   a. $z = \frac{2-5i}{3+4i} + \frac{3-4i}{25i}$

   b. $z = \frac{12-5i}{(1+i)(1+2i)(1+3i)}$

5. Misalkan A(1,-2) , B(-3,4) , dan C(2,2) adalah titik sudut segitiga ABC. Tentukan Panjang garis berat dari C ke sisi AB.

6. Tuliskan bilangan kompleks berikut dalam bentuk kutub, tentukan juga $\bar{z}$.

   a. $z = (1+i)^7$
   b. $z = \dfrac{i\sqrt{2}}{3+3i}$
   c. $z = -1 + i\sqrt{3}$
   d. $z = \dfrac{(1-i)^3}{1+i}$

7. Hitunglah $(-5 + i\sqrt{75})^4$

8. Selesaikan persamaan $z^4 + 81 = 0$

9. Tentukan semua akar dari $z^4 + z^2 + 1 = 0$

10. Tentukan semua nilai z sehingga $z^5 = -32$

11. Tentukan semua akar dari $(-8 - 8\sqrt{3}\,i)^{\frac{1}{4}}$ dan gambarkan akar-akar tersebut dalam bidang kompleks.

12. Jika $z_1, z_2 \in C$ dan z_1 dan z_2 dipandang sebagai bentuk polar maka buktikan bahwa

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)\}$$

13. Misalkan w= $f(z) = z^4$. Tentukan w_1 dan w_2 , jika $z_1 = -9 + \sqrt{3}\ i$ dan z_2 = 4 – 0 i Tentukan juga jarak antara w_1 dan w_2

14. Gambarkanlah untuk seyiap persamaan dari bilangan kompleks berikut!

a. $\text{Re}(z+3) = -1$

b. $(z-3) = 5$

c. $\text{Im}|z-2i| = -1$

d. $|z+i| = |z-i|$

15. Gambarkalah untuk setiap pertidaksamaan bilangan kompleks berikut !

a. $3|z+4| \geq 12$

b. $|z+i| = |z-i|$

c. $|z+5i| \geq 3z$

d.

$|z+3| + |z+1| \geq 4$

Selamat Mengerjakan, succes!

DAFTAR PUSTAKA

Barron, M dan Young, Karen Romano. 1995. *Ready, Set, Count*. New York:Skylight Press Book.

Churchil, R.V, 2009, Complex Variable & Application 8th edition, Mc Graw-Hill.

Gunawan.2009. *Pengantar Analisis Fourier dan Teori Aproksimasi*.http://personal.fmipa.itb.ac.id/hgunawan/files/2009/02/bab0-b.pdf. [21- 05- 2009].

Jack D, Wilson.1967. *Elementary mathematics A Modern Approach*. New York: Mc. Graw Hill Book Company.

Kusumawinahyu. 2014. *Fungsi Kompleks*. Universitas Brawijaya

Mutaqin. 2008. *Bilangan Kompleks*.Untirta: Jakarta.

Russefendi. 1982. *Dasar Dasar Matematika Modern Untuk Guru*. Bandung: Tarsito.

Spiegel. 1987. *Seri Buku Schaum Teori dan Soal-soal Peubah Kompleks*. Erlangga: Jakarta.

Stupiansky, Nicholas. 1992. *Learning Through Play Math*. New York: Scholastic Inc. early Childhood Division.