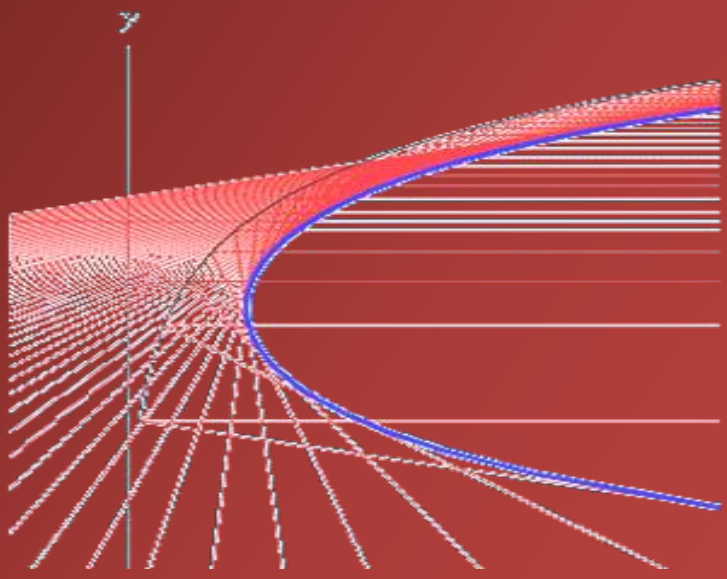
Pengantar

ANALISIS KOMPLEKS



Dr. FX. Didik Purwosetiyono, S.Pd., M.Pd.

UPGRIS PRESS 2022

PENGANTAR
ANALISIS KOMPLEKS

Penulis:
Dr. FX. Didik Purwosetiyono, S.Pd., M.Pd.

Penerbit:

UPT Penerbitan Universitas PGRI Semarang Press

PENGANTAR ANALISIS KOMPLEKS
ISBN: 978-623-8087-06-8

ISBN 978-623-8087-06-8

9 786238 087068

Penulis:
Dr. FX. Didik Purwosetiyono, S.Pd., M.Pd.

Penyunting: Tim Kreatif UPGRIS Press
Dr. Rasiman, M.Pd., Maya Rini Rubowo, S.Pd.,M.Sc., Rizky Esti Utami, S.Pd.,M.Pd.

Perancang Sampul dan Penata Letak : Lontar Media

Penerbit:
UPT Penerbitan Universitas PGRI Semarang Press
Jl. Sidodadi Timur No 24, Dr. Cipto Semarang 50125 Jawa Tengah
Telepon: 085640369110

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat-Nya, sehingga buku yang berjudul **"Pengantar Analisis Kompleks"** dapat diselesaikan dengan baik. Terselesaikannya penulisan buku ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin memberikan ucapan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada mereka yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan buku ini. Ucapan terima kasih dan penghargaan penulis ucapkan kepada yang terhormat:

1. Rektor Universitas PGRI Semarang.
2. Prodi Pendidikan Matematika Universitas PGRI Semarang.
3. Dr. Rasiman, M.Pd., Maya Rini Rubowo, S.Pd.,M.Sc., Rizky Esti Utami, S.Pd.,M.Pd. sebagai penyunting buku Pengantar Analisis Kompleks.
4. Pihak-pihak lain yang membantu penulisan buku ini.

Akhirnya semoga bantuan yang telah diberikan kepada penulis, mendapat balasan yang indah dari Tuhan Yang Maha Pemurah. Penulis menyadari tulisan ini masih banyak kekurangan, oleh karena itu segala saran dan kritik akan selalu penulis harapkan demi perbaikan yang lebih sempurna. Semoga modul ini dapat memberikan sumbangan berarti dalam dunia pendidikan.

Semarang, Desember 2022

Penulis

DAFTAR ISI

BAGIAN 1: PENDAHULUAN

Johann Carl Friedrich Gauss (Lahir: 30 April 1777 Brunswick, Duchy of Brunswick-Wolfenbüttel, Kekaisaran Romawi) adalah matematikawan, astronom, dan fisikawan Jerman yang memberikan beragam kontribusi, termasuk teori bilangan, aljabar, statistik, analisis, geometri diferensial, geodesi, geofisika,elektrostatika, astronomi, dan optik.

Bilangan imajiner $x^2 + 4 = 0$ tidak dapat diselesaikan apabila bilangan riil yang dipakai. Hasil yang diperoleh adalah $x = \pm \sqrt{-4}$, atau $x = \pm 2\sqrt{-1}$. Seperti dinyatakan oleh Euler bahwa ekspresi $\sqrt{-1}$ dan $\sqrt{-2}$ tidak dimungkinkan atau merupakan bilangan-bilangan imajiner, karena akar bilangan adalah negatif; sesuatu tidak ada apa-apa (nothing) karena bukan bilangan dan bukan pula bilangan yang lebih besar dari sesuatu tidak ada (nothing).* Gauss menyatakan bahwa bilangan negatif juga termasuk dalam sistim bilangan.

Pengembangan dari penyelesaian persamaan kubik dengan koneksi persamaan *depressed cubic* serta formula Ferro-Tartaglia selanjutnya memberi legitimasi bagi posibilitas eksistensi bilangan imajiner. Meskipun problem matematika yang melibatkan akar bilangan negatif sebenarnya sudah disadari sebelumnya, sebagai misal dari persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0$ yang solusinya $x = \pm \sqrt{-1}$. Namun pada masa Cardano konsep bilangan negatif masih diperlakukan dengan penuh curiga mengingat pada saat itu masih sulit untuk menemukan kesesuaiannya dengan realitas fisis. Sehingga munculnya akar dua dari bilangan negatif menambah keasingan bagi bilangan itu sendiri. Cardano sendiri mengatakan proses matematika dengan $\sqrt{-1}$ melibatkan "*mental tortures*" dan ia pun menyimpulkan, "*as subtle as it would be useless*."

Gauss membagi bilangan dimulai dari bilangan kompleks. Dari bilangan kompleks itu kemudian diturunkan bilangan-bilangan lain. Bilangan riil, sebagai contoh, sebenarnya adalah bilangan dalam bentuk $a + bi$, dimana a adalah bilangan riil dan $b = nol$; bilangan imajiner adalah bilangan kompleks yang mempunyai bentuk sama dengan $a = nol$ dan b adalah bilangan riil. Untuk memudahkan penjelasan diberikan diagram di bawah ini.

Keberadaan bilangan kompleks tidak hanya mempengaruhi aljabar, tapi juga berdampak pada analisis dan geometri. Teori fungsi dari bilangan kompleks kemudian dikembangkan; geometri diferensial [angka] mutlak dan analisis vektor sangat vital bagi sains modern berkembang sehingga dikenal bilangan-bilangan setengah riil dan setengah imajiner.

Bilangan kompleks dapat ditambah, dikurang, dikali, dibagi, dipangkat atau dicari hasil akarnya dalam kasus dimana bilangan kompleks dalam bentuk $a + bi$ meskipun a, b atau keduanya mungkin sama dengan nol. Bilangan baru dapat dibuat untuk melakukan operasi terhadap bilangan-bilangan kompleks. Sistem bilangan aljabar lama sekarang tertutup, untuk penggunaan bilangan bilangan kompleks, semua bentuk persamaan dapat diselesaikan dan semua jenis operasi dapat dilakukan. Prestasi penutupan sistem matematika ini adalah misi manusia terus mencari-cari sejak jaman Pythagoras.

Ide pertama untuk menyatakan bilangan kompleks dalam bentuk geometris bersumber dari John Wallis pada tahun 1673. Sayangnya ekspresi geometris awal terhadap bilangan kompleks mengarah ke konsekuensi yang tidak diharapkan, yaitu $-\sqrt{-1}$ dinyatakan pada titik yang sama dengan $\sqrt{-1}$. Namun setidaknya representasi geometris ini memberikan konsepsi baru terhadap bilangan kompleks sebagai "titik pada bidang." Upaya ini kemudian diteruskan oleh Caspar Wessel, Abbe Buee dan Jean Robert Argand. Di sisi lain, dalam risalahnya Euler menulis, "*…for we may assert that they are neither nothing, not greater than nothing, nor less than nothing, which necessarily renders them imaginary or impossible.*"

Jelasnya, setelah ia memperlakukan bilangan imajiner secara matematis dan formal, dan menunjukan bahwa i mempunyai validitas matematis, pada akhirnya harus ia katakan bahwa eksistensi i dalam realitas adalah *impossible*, atau paling tidak "mental reality" belum mampu meletakan status ontologisnya.

Dua matematikawan lain yang turut memberikan sumbangan penting terhadap pengembangan bilangan imajiner adalah Augustin-Louis Cauchy (1789—1857) dan Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855). Cauchy menemukan beberapa teorema penting dalam bilangan kompleks,

sedangkan Gauss menggunakan bilangan kompleks sebagai peralatan penting dalam pembuktian teorema fundamental dalam aljabar, yaitu terbukti bahwa melalui bilangan kompleks, terdapat solusi untuk setiap persamaan polinomial berderajat n. Dalam paper yang dikeluarkan tahun 1831, Gauss menyatakan representasi geometris untuk bilangan kompleks $x + iy$ dengan titik (x, y) dalam bidang kordinat. Ia juga menjelaskan operasi-operasi aritmetika dengan bilangan kompleks ini.

Atas dasar usaha Gauss, bilangan kompleks mulai disadari legitimasinya. Sebagian ahli matematika meyakini keberadaan bilangan kompleks dan berusaha memahaminya, sebagian yang lain tidak, dan sebagian lagi meragukannya. Pada tahun 1833 William Rowan Hamilton menyatakan bilangan kompleks sebagai pasangan bilangan (a,b). Kendati kelihatannya hanya sebuah ekspresi lain alih-alih $a + ib$, dengan maksud agar lebih mudah ditangani melalui aritmetika. Usaha ini memicu Karl Weierstrass, Hermann Schwarz, Richard Dedekind, Otto Holder, Henri Poincare, Eduard Study, dan Sir Frank Macfarlane Burnet untuk merumuskan teori umum tentang bilangan kompleks. Dan atas upaya August Möbius aplikasi bilangan kompleks ke dalam geometri menjadi lebih jelas bentuk-bentuk formula transformasinya.

BAGIAN 2: BILANGAN KOMPLEKS

A. Bilangan Kompleks

Tidak ada bilangan real x yang memenuhi persamaan suku banyak $x^2 + 1 = 0$. Untuk memperbolehkan adanya jawaban dari persamaan ini dan yang sejenisnya, maka himpunan bilangan kompleks diperkenalkan.

Mengapa perlu bilangan kompleks ?

$x^2 - 1 = 0$ mempunyai penyelesaian dengan $x \in \Re$.

$x^2 + 1 = 0 \iff x^2 = -1$ tidak mempunyai penyelesaian, untuk $x \in \Re$.

(Mengapa pada kasus ini tidak diketahui penyelesaiannya? Coba anda jelaskan!)

Sehingga perlu mengidentifikasi suatu bilangan dimana persamaan $x^2 + 1 = 0$ mempunyai penyelesaian. Selanjutnya perlu dikembangkan suatu sistem bilangan yaitu bilangan kompleks untuk menyelesaikan persoalan.

Kita dapat memandang suatu bilangan kompleks sebagai bilangan yang berbentuk *a + b*i dimana *a,b*$\in R$ dan $i \in I$, bentuk i dinamakan satuan khayal *(imaginary unit)* bersifat $i^2 = -1$. Jika *z = a + bi*, maka a dinamakan bagian riil dari z dan *bi* dinamakan bagian khayal dari z dan berturut-turut dinyatakan dengan *Re {z}* dan *Im {z}*. Lambang z dapat digunakan untuk suatu anggota dari himpunan bilangan kompleks dan dinamakan peubah/ fungsi kompleks.

Definisi Bilangan Kompleks	Bilangan kompleks *z* : merupakan pasangan berurut (x, y) dengan x , $y \in \Re$. ditulis : $z = (x, y)$. merupakan bilangan yang berbentuk $x + iy$ dengan x , $y \in \Re$ dan $i = (0,1) = \sqrt{-1}$. ditulis : $z = x + iy$.

Jika $z = (x, y) = x + iy$ maka

$x = \mathrm{Re}\,(z)$ = bagian riil *z*,

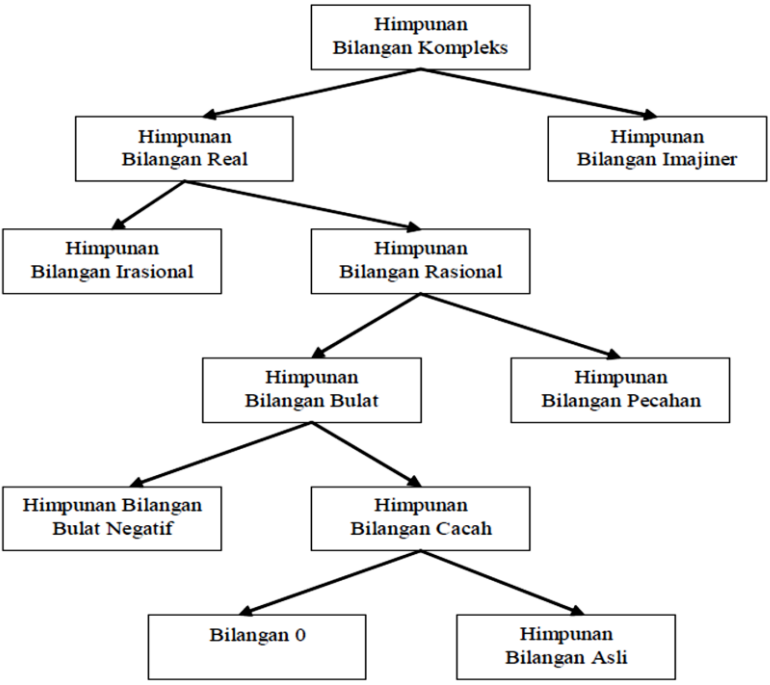
$y = \mathrm{Im}\,(z)$ = bagian imajiner *z*,

i = satuan imajiner dan $i^2 = -1$.

diperoleh

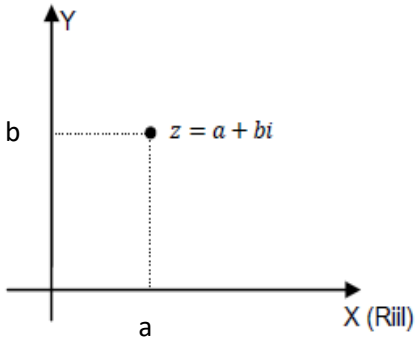
$$\boxed{\begin{array}{ccccc} z = & x & + & iy \\ & \mathrm{Re}(z) & & \mathrm{Im}(z) \end{array}}$$

Perhatikan bagan berikut ini! Menurut anda apakah skema bilangan yang anda kenal sudah sesuai dengan sekema tersebut? Jika tidak beri alasannya!



Gambar 1 Bagan Bilangan

Bilangan kompleks merupakan pasangan berurut (x, y), sehingga secara geometri dapat disajikan sebagai titik (x, y) pada bidang kompleks (bidang *Argand*), dengan sumbu *x* (sumbu riil) dan sumbu *y* (sumbu imajinair). Selain itu, bilangan kompleks $z = x + iy$ juga dapat disajikan sebagai vektor dalam bidang kompleks dengan titik pangkal pada titik asal dan ujung vektor merupakan titik (x, y).



Gambar 2. Koordinat di bidang kompleks

Dua bilangan kompleks dikatakan sama jika bagian real bilangan pertama sama dengan bagian real bilangan ke dua dan bagian imajiner bilangan pertama sama dengan bagian imajiner bilangan ke dua. Notasi matematika dapat dituliskan sebagai berikut. Misalkan $z_1 = a_1 + ib_1$ dan $z_2 = a_2 + ib_2$.

$$z_1 = z_2,\ a_1 = a_2 \text{ dan } b_1 = b_2$$

Dua bilangan kompleks *a + bi* dan *c + di* dikatakan **sama** *jika dan hanya jika a = c* dan *b = d*. Kita dapat memandang bilangan riil sebagai bagian dari himpunan bilangan kompleks dengan *b = 0*. Jadi bilangan kompleks *0 + 0i* dan *-3 + 0i* berturut-turut menyatakan bilangan 0 dan -3. Jika *a = 0*, maka bilangan kompleks *0 + bi* dapat ditulis hanya dengan *bi* dinamakan bilangan khayal sejati.

Kompleks sekawan atau disingkat **kawan** dari suatu bilangan kompleks *a + bi* adalah bilangan *a - bi*. Kompleks sekawan suatu bilangan kompleks z seringkali dinyatakan sebagai $\bar{z}$ (*z bar*).

Operasi-operasi aljabar bilangan kompleks

Operasi aljabar pada bilangan kompleks sesuai dengan operasi aljabar pada bilangan riil.

Misalkan $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$.

a. Penjumlahan : $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$

b. Pengurangan : $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)$

c. Perkalian :

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

d. Pembagian :

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}, \quad z_2 \neq 0$$

Perlu diperhatikan :

1. $-z$ (negatif z).

   Jika $z = x + iy$ maka $-z = -x - iy$.

2. z^{-1} (kebalikan z)

   Jika $z = x + iy$ maka $z^{-1} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - i\,\dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

   (Coba anda tunjukkan sebagai latihan!)

Sifat operasi aljabar adalah sebagai berikut

a. Hukum komutatif

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \text{ dan } z_1z_2 = z_2z_1$$

b. Hukum asosiatif

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$(z_1z_2)\,z_3 = z_1\,(z_2z_3)$$

c. Hukum distributif

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$$

d. Elemen netral dalam penjumlahan ($0 = 0 + 0\,i$)

$$z + 0 = 0 + z = z$$

e. Elemen netral dalam perkalian ($1 = 1 + 0\,i$)

$$z\,.1 = 1.\,z = z$$

Dasar-Dasar Aksiomatik Sistem Bilangan Kompleks

Dari sudut pandang logika dimungkinkan untuk mendefinisikan suatu bilangan kompleks sebagai suatu pasangan terurut (a,b) dari bilangan riil a dan b terhadap definisi operasi tertentu, yang kemudian ternyata setara dengan yang di atas. Definisi ini adalah sebagai berikut, dimana semua huruf menyatakan bilangan riil.

A. Kesamaan

(a,b) = (c,d) jika dan hanya jika a = c , b = d

B. Jumlah

(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)

C. Hasil kali

(a,b).(c,d) = (ac – bd, ad + bc)

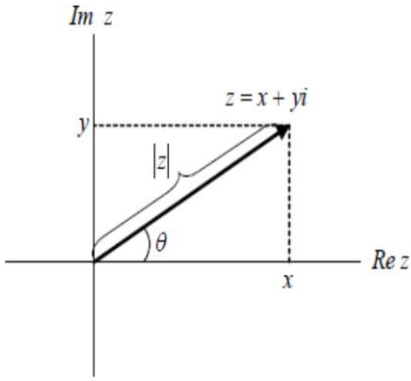
m (a,b) = (ma, mb), *dengan m skalar*

(Coba anda tunjukkan dengan pembuktian sebagai latihan!)

B. Nilai Mutlak/ Modulus dan Sekawan/ Konjugate pada bilangan kompleks

Penyajian bilangan kompleks sebagai vektor dapat digunakan untuk mengembangkan konsep nilai mutlak bilangan riil pada bilangan kompleks.

Definisi modulus (nilai mutlak)	Modulus (nilai mutlak) $z = x + iy$ didefinisikan sebagai bilangan riil non negatif $\sqrt{x^2 + y^2}$ dan ditulis sebagai Modulus $z = \lvert z \rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$



Gambar 3. Modulus bilangan kompleks

Secara geometri, $|z|$ menyatakan jarak antara titik (x, y) dan titik asal. Misalkan $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$. Jarak antara z_1 dan z_2 didefinisikan dengan :

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \ .$$

Selanjutnya, persamaan $|z - z_0| = R$ menyatakan bilangan kompleks *z* yang bersesuaian dengan titik-titik pada lingkaran dengan pusat z_0 dan jari-jari *R*.

Misal $z = x + iy$, $x, y \in \Re$, i^2 = -1

Modulus dari z dinyatakan dengan "$|z|$" dan didefinisikan

sebagai; $|z|$ = $|x + iy|$ = $\sqrt{x^2 + y^2}$

Contoh 1:

Jika z = $5 + 5i$

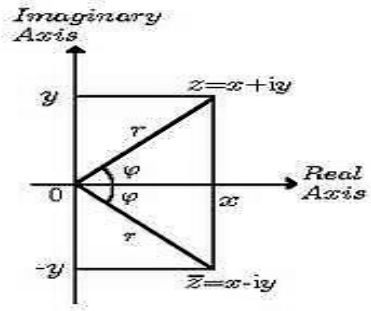
Maka $|z|$ = $|5 + 5i|$ = $\sqrt{5^2 + 5^2}$ = 5$\sqrt{2}$

Sehingga modulus dari $5 + 5i$ adalah 5$\sqrt{2}$

Sekawan pada Bilangan Kompleks

Definisi bilangan kompleks sekawan	Bilangan kompleks sekawan dari $z = x + iy$ didefinisikan sebagai bilangan kompleks $\bar{z} = x - iy$.

Secara geometri, bilangan kompleks sekawan $\bar{z} = x - iy$ dinyatakan dengan titik $(x, -y)$ dan merupakan pencerminan titik (x, y) terhadap sumbu riil.



Gambar 4. Sekawan bilangan kompleks

Dari Gambar di atas Konjugate bilangan kompleks z = x+yi adalah $\bar{z}$ = x-yi, dimana Konjugate z tidak lain adalah pencerminan z terhadap sumbu Re z.

Contoh 2

a. $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.

b. $|z + 3 - 3i| = 2$ menyatakan lingkaran dengan pusat $z_0 = (3, -3)$ dan jari-jari $R = 2$.

c. Jika $z = 3 - 4i$ maka $\bar{z} = 3 + 4i$

Sifat Modulus dan Bilangan Kompleks Sekawan

a. $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$

b. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

c. $\bar{\bar{z}} = z$

d. $|\bar{z}| = |z|$

e. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

f. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

g. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2$

h. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

i. $z\bar{z} = |z|^2$

j. $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

k. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Buktikanlah sifat-sifat modulus tersebut sebagai latihan!

Contoh 3:

Akan dibuktikan $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Bukti :

Misal $z_1 = x_1 + iy_1$, dan $z_2 = x_2 + iy_2$

Maka $|z_1| = |x_1 + iy_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$,

$|z_2| = |x_2 + iy_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2| &= |(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2| \\
&= |(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i| \\
&= \sqrt{(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2)} \\
&= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2x_1x_2 + 2y_1y_2}
\end{aligned}$$

Akan dibuktikan bahwa $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2x_1x_2+2y_1y_2} \le \sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

$$x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2x_1x_2+2y_1y_2 \le (x_1^2+y_1^2)+2\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}+(x_2^2+y_2^2)$$

$$2\ (x_1x_2+y_1y_2) \le 2\sqrt{x_1^2+y_1^2}\ \sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

$$(x_1x_2+y_1y_2) \le \sqrt{x_1^2+y_1^2}\ \sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

$$x_1^2x_2^2+2x_1y_1.x_2y_2+y_1^2y_2^2 \le x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2$$

$$2x_1y_1.x_2y_2 \le x_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2$$

$$x_1^2y_1^2+y_1^2x_2^2-2x_1y_1.x_2y_2 \ge 0$$

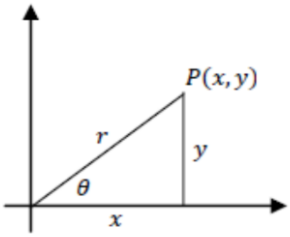
$$(x_1y_2-y_1x_2)^2 \ge 0$$

Bentuk tersebut memenuhi jadi terbukti bahwa

$$|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

C. Bentuk Kutub Bilangan Kompleks

Perhatikanlah gambar berikut.



Gambar 5. Bentuk kutub bilangan kompleks

Jika P adalah suatu titik dibidang kompleks yang dikaitkan dengan bilangan kompleks *(x, y)* atau *x + iy,* maka diperoleh sebagai berikut.

$$x = r\cos\vartheta$$

$$y = r\sin\vartheta$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

Sehingga bentuk *z = x +iy* menjadi :

$$z = r\cos\vartheta + i\, r\sin\vartheta$$

z = r (cos ϑ + i sin ϑ)

z = r Cis ϑ

(Bentuk kutub bilangan kompleks)

Nilai argumen dari *z* (arg *z*) tidak tunggal tetapi merupakan kelipatan 2π (sesuai dengan kuadran dimana titik *z* berada). Sedangkan, nilai utama (*principal value*) dari $\arg z$ ditulis $Arg\ z$ dengan $-\pi < Arg\ z \le \pi$ adalah tunggal.

Jelas, $\arg z = Arg\ z + 2n\pi \quad , \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$

Perlu diperhatikan bahwa :

$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \qquad \bar{z} = r\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)$$

$$= r\ cis\theta \qquad = r\ cis\left(-\theta\right)$$

$$\arg z = \theta$$

$$\arg \bar{z} = -\theta$$

Contoh 1:

Nyatakan bilangan kompleks *z = 2 + 2*$\sqrt{3}$ *i* dalam bentuk kutub!

Penyelesaian :

$$r = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$$

ϑ = arc. tan $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ *= 60°*

Jadi, bentuk kutub dari *z = 2 + 2*$\sqrt{3}$ *i* adalah

z = 4 (Cos 60° + i Sin 60°)

Contoh 2:

Nyatakan bentuk kutub *z = 4 (Cos 30° + i Sin 30°)* dalam bentuk bilangan kompleks !

Penyelesaian :

x = r cos ϑ = 4 Cos 30° =2$\sqrt{3}$

y = r sin ϑ = 4 Sin 30°= 2

Jadi bilangan kompleks dari

z = 4 (Cos 30°+ i Sin 30°) adalah

z = $2\sqrt{3}$ *+ 2i*

Operasi aljabar bentuk kutub dan sifat argumen

Misalkan $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\ \sin\theta_1)$ dan $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\ \sin\theta_2)$ dengan $r_1 = |z_1|,\ r_2 = |z_2|,\ \arg z_1 = \theta_1, \arg z_2 = \theta_2$.

a. Perkalian

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\ cis\ (\theta_1 + \theta_2)$$
$$= |z_1 z_2|\ cis\ (\theta_1 + \theta_2)$$
$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2.$$

b. Pembagian $(z_2 \neq 0)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} cis(\theta_1 - \theta_2) = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| cis(\theta_1 - \theta_2).$$

$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

c. Invers sebarang bilangan kompleks $z = r\,e^{i\theta}$ yaitu $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}\ cis(-\theta)$.

$$\arg\frac{1}{z} = -\arg z$$

Contoh 3 :

Diketahui $z = \dfrac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{-1+i}$. Tentukan bentuk kutub dari *z* dan nilai $\bar{z}$.

Penyelesaian :

Menggunakan sifat argumen diperoleh :

$$z = \frac{(\sqrt{2}\ cis\frac{\pi}{4})(2\ cis\frac{\pi}{3})}{\sqrt{2}\ cis\frac{3\pi}{4}} = 2\ cis\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= 2\ cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

dan $\bar{z} = 2\ cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$

D. Rumus De'Moivre

Jika $z_1 = x_1 + i\,y_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)$

dan $z_2 = x_2 + i\,y_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$

kita dapat menunjukkan bahwa :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left\{\cos\left(\theta_1+\theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right\} \quad \text{.....*)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left\{\cos\left(\theta_1-\theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\right\}$$

Suatu perumuman dari **)* memberikan :

$$z_1 z_2 \ldots\ldots z_n = r_1 r_2 \ldots\ldots r_n \left\{\cos\left(\theta_1+\theta_2+\ldots\ldots+\theta_n\right) + i\sin\left(\theta_1+\theta_2+\ldots\ldots+\theta_n\right)\right\}$$

dan jika $z_1 = z_2 = \ldots\ldots = z_n = z$, ini menjadi

$$z^n = \left\{r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\right\}^n = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$$

yang seringkali disebut teorema ***De' Moivre***

Bentuk pangkat

Misalkan $z = r\,e^{i\theta}$, maka menggunakan aturan pangkat seperti pada bilangan riil diperoleh

$$z^n = (r\,e^{i\theta})^n = r^n\,e^{in\theta},$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Rumus Moivre

Jika $r = 1$, maka bentuk pangkat di atas menjadi $z^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, atau

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$,

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Selanjutnya dapat ditulis dalam bentuk

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

yang disebut ***Rumus Moivre*** .

Contoh:

Hitunglah $(-5+i\sqrt{75})^4$

Jawab:

Misal $z=-5+i\sqrt{75}$ maka $r=|z|=\sqrt{25+75}=10$ dan

Arc $z=\arctan\left(\frac{\sqrt{75}}{-5}\right)=\frac{2}{3}\pi;\ z=10\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

$$z^4=10^4\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^4=10^4\left(\cos\frac{8}{3}\pi+i\sin\frac{8}{3}\pi\right)$$

$$=5.10^4(\cos 60+i\sin 60)=5.10^4\left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$=25.10^3\left(1+\sqrt{3}\ i\right)$$

E. Rumus Euler dan bentuk Eksponen bilangan kompleks

Selain dalam bentuk umum $z=x+iy$ dan bentuk kutub $z=r(\cos\theta+i\ \sin\theta)$, bilangan kompleks z juga dapat dinyatakan dalam bentuk eksponen.

Bentuk eksponen bilangan kompleks $z=x+iy$ yaitu $z=r\,e^{i\theta}$ dengan $e^{i\theta}=\cos\theta+i\ \sin\theta$ dinamakan rumus Euler.

Misalkan $z_1=r_1\,e^{i\theta_1}$ dan $z_2=r_2\,e^{i\theta_2}$.

a. Perkalian

$$z_1z_2=r_1\,r_2\,e^{i\theta_1}\,e^{i\theta_2}=r_1\,r_2\,e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

b. Pembagian

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\,e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

c. Invers sebarang bilangan kompleks $z=r\,e^{i\theta}$ yaitu

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{r}\,e^{-i\theta}$$

F. Akar Bilangan Kompleks

Bentuk akar

Misalkan $z = r\ cis\theta$, akar pangkat *n* dari bilangan kompleks z ditulis $z^{\frac{1}{n}}$ atau $\sqrt[n]{z}$. Jika diberikan bilangan kompleks $z \neq 0$ dan *n* bilangan bulat positif, maka diperoleh *n* buah akar untuk $z^{\frac{1}{n}}$ yaitu, dapat dintatakan sebagai berikut.

$$z_k = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\ \sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right],$$

Untuk $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Secara geometri, *n* buah akar tersebut merupakan titik-titik sudut segi n beraturan pada suatu lingkaran dengan pusat titik O dan jari-jari $\sqrt[n]{r}$.

Contoh 1: Tentukan semua akar dari $\sqrt[3]{-8i}$ dan gambarkan akar-akar tersebut dalam bidang kompleks.

Penyelesaian :

Misalkan $z = -8i$,

maka $r = |z| = 8$

dan $\theta = arctg\frac{-8}{0} = -\frac{\pi}{2}$,

$$z_k = \sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8}\left[\cos\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i[\sin\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}]\right]$$

$k = 0, 1, 2.$

Sehingga diperoleh

$$z_0 = \sqrt[3]{8}\left[\cos\frac{-\frac{\pi}{2}}{3} + i\ \sin\frac{-\frac{\pi}{2}+}{3}\right] = 2\left[\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right] = \sqrt{3} - i$$

$$z_1 = 2\left[\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})\right] = 2i\,.$$

$$z_2 = 2\left[\cos(\frac{7\pi}{6}) + i\,\sin(\frac{7\pi}{6})\right] = -\sqrt{3} - i\,.$$

Contoh 2: Tentukan setiap akar yang diberikan berikut dan letaknya pada bidang kompleks $(-1+i)^{\frac{1}{3}}$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$(-1+i)^{\frac{1}{3}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left\{cos\frac{\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)}{3} + i\,sin\frac{\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)}{3}\right\}$$

Untuk

$$k = 0,\ z_1 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$k = 1,\ z_1 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right)$$

$$k = 2,\ z_1 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{19\pi}{4} + i\sin\frac{19\pi}{4}\right)$$

Contoh 3:

Tentukan setiap akar yang diberikan berikut dan letaknya pada bidang kompleks $\left(2\sqrt{3} - 2i\right)^{\frac{1}{2}}$

(Kerjakan sebagai latihan)

G. Persamaan dan Pertidaksamaan Bilangan Kompleks

Konsep-konsep geometri analitik bidang berkorespondensi dengan bilangan kompleks dapat digambarkan melalui bentuk kompleks persamaan pada bidang koordinat kurvalinear. Untuk menentukan tempat kedudukan titik-titik yang memenuhi dapat kita tentukan dengan menggambar ilustrasi grafik persamaan atau pertidaksamaan pada bidang koordinat kurvalinear.

Contoh 1:

Tentukan tempat kedudukan titik-titik dalam bidang yang memenuhi $|z+2i| \geq 1$ dengan menggambarkan dalam koordinat kurvalinear.

<u>Pembahasan</u>

Maka ; $|z+2i| \geq 1$

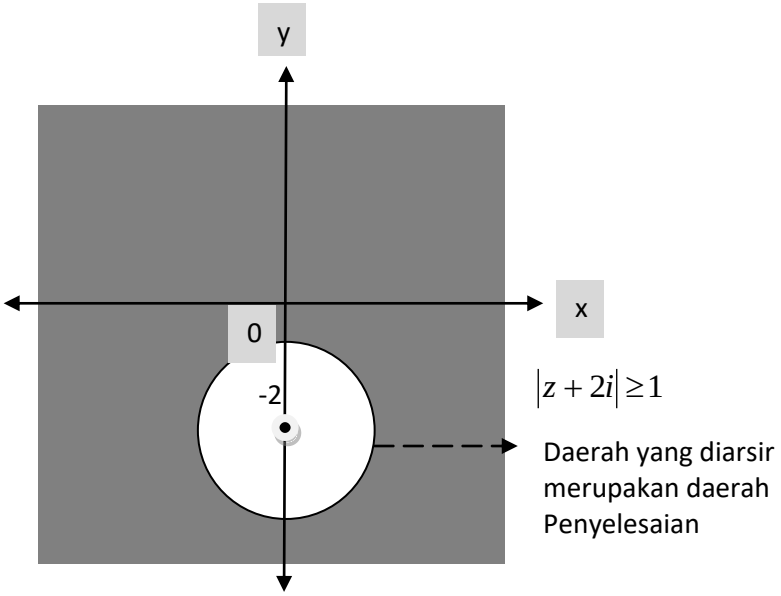
$$|x+iy+2i| \geq 1$$

$$|x+i(y+2)| \geq 1$$

$$\sqrt{x^2+(y+2)^2} \geq 1$$

$$x^2+(y+2)^2 \geq 1$$

Gambar grafik dari pertidaksamaan, adalah sebagai berikut ;



H. Persamaan Suku Banyak

Penyelesaian persamaan suku banyak berbentuk

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

dimana $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n$ bilangan kompleks yang diketahui dan *n* bilangan bulat positif. Persamaan suku banyak memiliki n akar kompleks. Jika $z_1, z_2, \ldots, z_n$ adalah n buah akar, maka

$$a_0(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n) = 0$$

dinamakan bentuk pemfaktoran persamaan suku banyak.

Contoh:

Selesaikan $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$

Penyelesaian:

$$z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$$

Setelah difaktorkan diperoleh

$$(z - 2)(z - 1)^2(z^2 + 2z + 2) = 0$$

Sehingga

$$z_1 = 2, z_2 = 1, z_3 = 1, z_4 = -1 + i, dan\ z_5 = -1 - i$$

Kompetensi 1: Soal – Soal latihan untuk diselesaikan !

1. Jika $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 3 + 2i$, $z_3 = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\ i$, hitunglah $\left|3z_1 - \frac{1}{2} z_2\right|$
2. Jika $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \frac{3}{2} + \sqrt{2}\ i$, $z_3 = -2i$, hitunglah $\left|\frac{z_2 + 2z_3}{2 - z_2}\right|$
3. Tentukan nilai x dan nilai y sehingga $3x + 3iy - i2x + 3y = 3 + 6i$
4. Buktikan sifat Modulus $|z_1 z_2| = |z_1|\ |z_2|$
5. Buktikan sifat sekawan $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
6. Buktikan sifat Modulus dan sekawan $z\,\overline{z} = |z|^2$
7. Buktikan sifat sekawan $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

8. Buktikan sifat pertidaksamaan modulus $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
9. Buktikan sifat sekawan $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
10. Tentukan $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$ dan $\bar{z}$ untuk $z = \dfrac{2-5i}{3+4i} + \dfrac{3-4i}{25i}$
11. Misalkan A(1,-2) , B(-3,4) , dan C(2,2) adalah titik sudut segitiga ABC. Tentukan Panjang garis berat dari C ke sisi AB.
12. Tuliskan bentuk kutub dari bilangan kompleks $z = (1+i)^7$ tentukan juga $\bar{z}$
13. Tuliskan bentuk kutub dari bilangan kompleks $z = -1 + i\sqrt{3}$ tentukan juga $\bar{z}$
14. Tuliskan bentuk kutub dari bilangan kompleks $z = \dfrac{i\sqrt{2}}{3+3i}$ tentukan juga $\bar{z}$
15. Tuliskan bentuk kutub dari bilangan kompleks $z = \dfrac{(1-i)^3}{1+i}$ tentukan juga $\bar{z}$
16. Hitunglah $(5 + i\sqrt{75})^4$
17. Hitunglah $(-5 + i\sqrt{75})^4$
18. Hitunglah $(5 - i\sqrt{75})^4$
19. Hitunglah $(-5 - i\sqrt{75})^4$
20. Selesaikan persamaan $z^4 + 81 = 0$
21. Tentukan semua akar dari $z^4 + z^2 + 1 = 0$
22. Tentukan semua nilai z sehingga $z^5 = -32$
23. Tentukan semua akar dari $(8 + 8\sqrt{3}\,i)^{\frac{1}{4}}$ dan gambarkan akar-akar tersebut dalam bidang kompleks.
24. Tentukan semua akar dari $(8 - 8\sqrt{3}\,i)^{\frac{1}{4}}$ dan gambarkan akar-akar tersebut dalam bidang kompleks

25. Tentukan semua akar dari $(-8+8\sqrt{3}\,i)^{\frac{1}{4}}$ dan gambarkan akar-akar tersebut dalam bidang kompleks
26. Tentukan semua akar dari $(-8-8\sqrt{3}\,i)^{\frac{1}{4}}$ dan gambarkan akar-akar tersebut dalam bidang kompleks.
27. Tentukan setiap akar yang diberikan berikut dan letaknya pada bidang kompleks $\left(2\sqrt{3}-2i\right)^{\frac{1}{2}}$
28. Tentukan setiap akar yang diberikan berikut dan letaknya pada bidang kompleks $(-1+i)^{\frac{1}{3}}$
29. Misalkan w= $f(z)=z^4$. Tentukan w_1 dan w_2 , jika $z_1=-9+\sqrt{3}\ i$ dan z_2 = *4 – 0 i* Tentukan juga jarak antara w_1 dan w_2
30. Gambarkanlah persamaan dari bilangan kompleks $\mathrm{Re}(z+3)=-1$
31. Gambarkanlah persamaan dari bilangan kompleks $\mathrm{Im}|z-2i|=-1$
32. Gambarkanlah persamaan dari bilangan kompleks $|z+i|=|z-i|$
33. Gambarkalah pertidaksamaan bilangan kompleks $|z+i|<|z-i|$
34. Gambarkalah pertidaksamaan bilangan kompleks $3|z+4|\geq 12$
35. Gambarkan pertidaksamaan bilangan kompleks $|z+3|+|z+1|\geq 4$

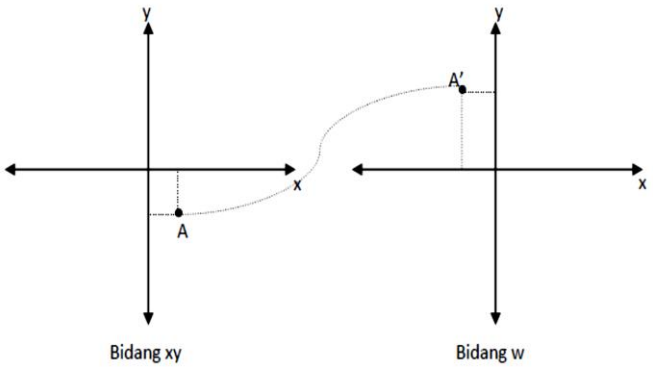
BAGIAN 3: FUNGSI KOMPLEKS

A. Fungsi Kompleks

Definisi Misalkan *S* himpunan bilangan kompleks. Fungsi kompleks *f* pada *S* adalah aturan yang mengawankan setiap $z \in S$ dengan bilangan kompleks *w*.

Notasi *w = f(z)*.

Dalam hal ini, *S* disebut domain dari *f* dan *z* dinamakan variabel kompleks.



Gambar 7. Transformasi fungsi kompleks

Misalkan *w = u + iv* adalah nilai fungsi *f* di *z = x + iy*, sehingga

u + iv = f(x + iy).

Masing-masing bilangan riil *u* dan *v* bergantung pada variabel riil *x* dan *y*, sehingga *f(z)* dapat dinyatakan sebagai pasangan terurut dari variabel riil *x* dan *y*, yaitu:

f(z) = u(x,y) + iv(x,y).

Jika koordinat polar *r* dan ϑ pada *x* dan *y* digunakan, maka;

$u + iv = f(re^{i\vartheta})$,

dimana $w = u + iv$ dan $z = re^{i\vartheta}$. Sehingga $f(z)$ dapat ditulis menjadi

$f(z) = u(r,\vartheta) + iv(r,\vartheta)$.

Contoh 1

Misalkan $w = f(z) = z^2 + 3z$.

Tentukan *u* dan *v* serta hitung nilai dari *f* pada

$z = 1 + 3i$. Nyatakan juga *u* dan *v* dalam bentuk polar !

Penyelesaian:

Diketahui $w = f(z) = z^2 + 3z$.

Misal $z = x + iy$,

sehingga

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+iy) = (x+iy)^2 + 3(x+iy) \\ &= x^2 + 3x - y^2 + i(2xy + 3y) \end{aligned}$$

Jadi $u = x^2 + 3x - y^2$ dan $v = 2xy + 3y$.

Untuk $z = 1 + 3i$

maka $f(z) = f(1+3i) = (1+3i)^2 + 3(1+3i) = -5 + 15i$.

Jadi $u(1,3) = -5$ dan $v(1,3) = 15$.

Jika koordinat polar digunakan dimana $z = re^{i\vartheta}$,

Maka

$$\begin{aligned} f(z) = f(re^{i\theta}) &= (re^{i\theta})^2 + 3(re^{i\theta}) = r^2 e^{2i\theta} + 3re^{i\theta} \\ &= r^2\cos 2\theta + ir^2 \sin 2\theta + 3r\cos\theta + 3ir\sin\theta \\ &= r^2\cos 2\theta + 3r\cos\theta + i(r^2 \sin 2\theta + 3r\sin\theta) \end{aligned}$$

$Jadi\ \ u = r^2\cos 2\theta + 3r\cos\theta$ dan

$$v = r^2 \sin 2\theta + 3r\sin\theta .$$

Contoh 2: Jika *f(x,y) =2x*^{2} *+iy* maka fungsi kompleks dalam *z*

Penyelesaian

Jika $z = x + iy$ dan $\bar{z} = x - iy$

menyebabkan

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \; dan \; y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

sehingga

$$f(z) = 2\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + i\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(z^2 + \bar{z}^2 + z - \bar{z}) + z\bar{z}$$

Sehingga *f (z)* dari dari *f(x,y)* adalah *f(z)*

B. Transformasi

Sifat-sifat dari fungsi bernilai riil dapat dilihat dari grafik fungsinya. Tetapi untuk *w = f(z)*, dimana *w* dan *z* bilangan kompleks, tidak ada grafik yang menyatakan fungsi *f* karena setiap bilangan *z* dan *w* berada di bidang bukan di garis bilangan.

Definisi Transformasi	Korespondensi antara titik-titik di bidang-*z* dengan titik-titik di bidang-*w* disebut pemetaan atau transformasi dari titik-titik di bidang-*z* dengan titik-titik di bidang *w* oleh fungsi *f*.

Contoh :

Jika $w = u + v$ (dimana u dan v riil) adalah suatu fungsi bernilai tunggal dari z = x + iy (dimana x dan y riil) maka kita dapat menuliskan sebagai $u + v = f(x, y)$

akibatnya diperoleh suatu transformasi, dengan menyamakan bagian riil dan khayal, maka dapat dinyatakan setara dangan;

$u = u(x, y)$

$v = v(x, y)$

Dimisalkan $w = u + iv$ dan $z = x + iy$

Jika diberikan suatu fungsi $w = z^2$

$maka\ \ u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

Jadi transformasinya adalah $u = x^2 - y^2$ dan $v = 2xy$

Jika diberikan suatu titik tertentu yaitu titik (1,2) maka bayangan titik tersebut di bidang w terhadap transformasi suatu fungsi $w = z^2$ adalah titik (-3, 4).

C. Titik Cabang dan Garis Cabang

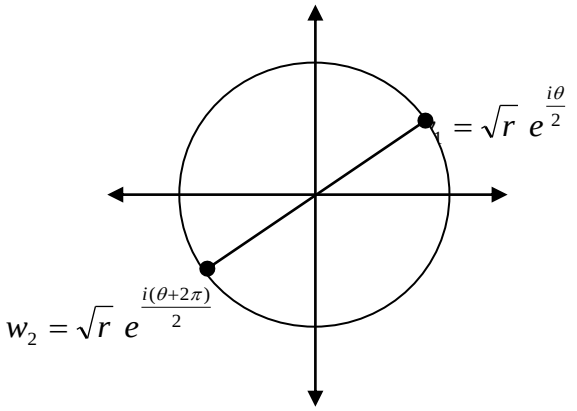
Misal untuk kasus $w = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ (apakah fingsi tersebut akan membuat putaran penuh yang arahnya berlawanan dengan jarum jam?)

diperoleh $z^{\frac{1}{2}} = re^{i\theta}$

dan $w = \sqrt{r}\ e^{\frac{i\theta}{2}}$

jika $\theta = \theta_1$ dan $w = \sqrt{r}\ e^{\frac{i\theta}{2}}$

maka $\theta = \theta_1 + 2\pi$ dan $w = \sqrt{r}\ e^{\frac{i(\theta+2\pi)}{2}}$



Gambar diatas merupakan titik cabag dan garis cabang $w = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$. Jika $w = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ diputar sebesar satu putaran (360^0) kita belum bisa sampai pada nilai w yang sama, tapi dengan membuat satu lintasan lengkap kedua maka akan diperoleh nilai w yang sama atau dengan kata lain kembali ke titik semula.

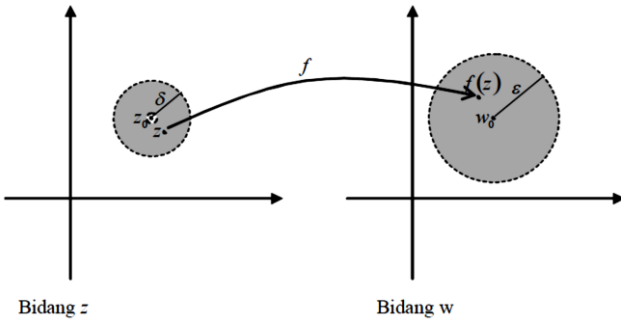
Sehingga untuk membuat satu putaran penuh diperlukan $\theta = \theta_1 + 4\pi$, yaitu $w_1 = \sqrt{r}\ e^{\frac{i\theta}{2}}$ akan sama dengan $w_3 = \sqrt{r}\ e^{\frac{i(\theta+4\pi)}{2}}$

Coba analisis pada kasus yang lainnya, seperti;

$$w = f(z) = z^{\frac{1}{3}}\ dan\ \ w = f(z) = z^{\frac{1}{5}}\ ,\ dsb.$$

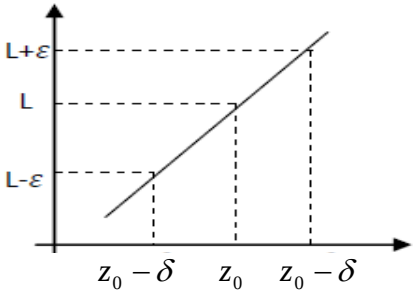
D. Limit Fungsi

Limit merupakan salah satu konsep kunci dalam kajian analisis. Sedangkan limit fungsi merupakan konsep yang digunakan untuk membahas materi kekontinuan fungsi, turunan fungsi, dan integral. Begitu pun halnya dalam fungsi kompleks. Limit fungsi di suatu z_0 menggambarkan perilaku fungsi di sekitar z_0. Secara intuisi kita dapat menghitung limit fungsi kompleks, seperti di kalkulus.
Secara formal definisi limit fungsi ditunjukkan oleh gambar berikut.



Gambar 8. Daerah limit fungsi

Secara umum definisi limit dalam kompleks sama dengan definisi limit pada bilangan riil dalam kalkulus. Kalau pada bilangan riil bila *x* mendekati x_0 hanya mendekati sepanjang garis riil sedangkan pada bilangan kompleks bila *z* mendekati z_0 akan mendekati dari semua arah dalam bidang kompleks.



Gambar 9. Limit fungsi kompleks

Andaikan suatu fungsi $f(z)$ adalah fungsi kompleks dengan variabel z dan limit $f(z)$ adalah L dengan z mendekati z_0 yaitu

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ sehingga $|f(z) - L| < \varepsilon \; jika \; 0 < |z - z_0| < \delta$

Secara geometri definisi di atas mengatakan bahwa untuk setiap lingkungan ε dari L, yaitu |f(z) - L|< ε ada suatu lingkungan δ dari z_0, yaitu 0 < |z - z_0| < δ sedemikian sehingga setiap titik z pada image f(z) berada pada lingkungan ε.

<u>Teorema Limit</u>

Jika $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$ *dan* $\lim_{z \to z_0} g(z) = B$, *maka:*

1. $\lim_{z \to z_0} \{f(z) + g(z)\} = \lim_{z \to z_0} f(z) + \lim_{z \to z_0} g(z) = A + B$
2. $\lim_{z \to z_0} \{f(z) - g(z)\} = \lim_{z \to z_0} f(z) - \lim_{z \to z_0} g(z) = A - B$
3. $\lim_{z \to z_0} \{f(z)\, g(z)\} = \left\{\lim_{z \to z_0} f(z)\right\}\left\{\lim_{z \to z_0} g(z)\right\} = AB$
4. $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim_{z \to z_0} f(z)}{\lim_{z \to z_0} g(z)} = \dfrac{A}{B}$, $jika \; B \neq 0$

Contoh 1:

Diketahui $\lim_{x \to 2}(2x - 1) = 3$ dan $\varepsilon = 0{,}01$. Tentukan δ.

Penyelesian:

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$
$$|2x - 1 - 3| < 0{,}01$$
$$|2x - 4| < 0{,}01$$
$$|2||x - 2| < 0{,}01$$
$$|x - 2| < 0{,}005$$

Karena

$$|2x - 1 - 3| < 0{,}01 \rightarrow |x - 2| < \delta$$
$$|x - 2| < 0{,}005 \rightarrow |x - 2| < \delta$$

Maka diperoleh

$$\delta = 0{,}005 = \frac{1}{2}\varepsilon$$

Contoh 2:

Jika f(z) = 3z + 2i, buktikan $\lim_{z \to i} f(z) = 5i$

Bukti :

Ambil $\varepsilon > 0$

Pilih $\delta = \{ \ \varepsilon \ \}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |z - i| < \delta \ \ berlaku |f(z) - L| < \varepsilon$

Maka

$|f(z) - L| = |(3z + 2i) - 5i| = |3z - 3i| = |3(z - i)| < 3\delta$

Dari definisi $|f(z) - L| < \varepsilon$

Dari perhitungan $|f(z) - L| < 3\delta$

Diperoleh $3\delta = \varepsilon \ \ atau \ \ \delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$

Sehingga nilai limitnya ada, jadi $\lim_{z \to i} f(z) = 5i$

Contoh 3:

Hitunglah $lim_{z \to 1+i} z^2 - 5z + 10$ dengan menggunakan teorema limit

Penyelesaian

$$\lim_{z \to 1+i} z^2 - 5z + 10 = \lim_{z \to 1+i} z^2 - \lim_{z \to 1+i} 5z + \lim_{z \to 1+i} 10$$
$$= (1 + i)^2 - 5(1 + i) + 10$$
$$= 5 - 3i$$

E. Limit Barisan

Suatu fungsi dengan peubah bilangan positif, yang dinyatakan oleh *f(n)* atau u_n , dimana *n=1,2,3,…,*∞ dinamakan suatu barisan. Jadi suatu barisan adalah suatu himpunan dengan u_1 , u_2, u_3,…, ∞ dalam suatu urutan tertentu yang diatur dan dibentuk melalui sesuatu aturan tertentu. Setiap bilangan dalam barisan dinamakan suku dan u_n dinamakan suku ke n. Barisan u_1 , u_2, u_3 ,…, ∞ yang disingkat dengan tulisan $\{u_n\}$. Barisan tersebut dinamakan barisan berhingga atau tak berhingga sesuai apakah bilangan yang terlibat banyaknya berhingga atau tidak.

Teorema pada Limit Barisan

Jika $\lim\limits_{z\to\infty} a_n = A$ *dan* $\lim\limits_{z\to\infty} b_n = B$*, maka:*

1. $\lim\limits_{z\to\infty}\{a_n + b_n\} = \lim\limits_{z\to\infty} a_n + \lim\limits_{z\to\infty} b_n = A + B$
2. $\lim\limits_{z\to\infty}\{a_n - b_n\} = \lim\limits_{z\to\infty} a_n - \lim\limits_{z\to\infty} b_n = A - B$
3. $\lim\limits_{z\to\infty}\{a_n\, b_n\} = \{\lim\limits_{z\to\infty} a_n\}\{\lim\limits_{z\to\infty} b_n\} = AB$
4. $\lim\limits_{z\to n}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{z\to n} a_n}{\lim\limits_{z\to n} b_n} = \dfrac{A}{B}$, *jika* $B \neq 0$

Misal terdapat suatu bilangan l dinamakan limit suatu barisan tak hingga u_1 , u_2, u_3,…, ∞ yang didefinisikan:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \ n > N, berlaku\ |u_n - l| < \varepsilon\ \ maka\ \lim_{n\to\infty} u_n = l$$

Jika limit barisan itu ada, maka dikatakan barisan tersebut konvergen, dalam hal lain dinamakan divergen. Suatu barisan hanya dapat konvergen ke satu limit, yaitu limit suatu barisan adalah tunggal.

Contoh 1:

1. Suatu barisan $i, i^2, i^3, \ldots, i^{100}$ disebut barisan berhingga, yang memenuhi untuk $u_n = i^n$, untuk n=1,2,3, … , 100.
2. Suatu barisan $1 + i, \frac{(1+i)^2}{2!}, \frac{(1+i)^3}{3!}, \ldots$ disebut barisan tak berhingga, yang memenuhi $u_n = \frac{(1+i)^n}{n!}$, untuk n = 1,2,3, … , ∞.

Contoh 2 :

Jika $u_n = \frac{i^n}{n}$ buktikan $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Bukti :

Ambil $\varepsilon > 0$

Pilih $k(\varepsilon) = N = \frac{1}{\varepsilon}$

Dan n > N

$\forall \varepsilon > 0,\ \ n > N, berlaku\ |u_n - 0| < \varepsilon\ \ maka\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Berlaku $|u_n - l| = |u_n - 0| = \left|\frac{i^n}{n} - 0\right| = \left|\frac{i^n}{n}\right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} < \varepsilon$

Sehingga ditemukan suatu $k(\varepsilon) = N = \frac{1}{\varepsilon}$ mengakibatkan limit barisannya ada, dan barisannya akan konvergen ke 0

Jadi $\lim_{n\to\infty} \frac{i^n}{n} = 0$

F. Kekontinuan

Definisi Kekontinuan: *Misalkan $f(z)$ adalah fungsi kompleks dengan daerah asal (domain) $D_f \subseteq \mathbb{C}$, dan $z_0 \in \mathbb{C}$, dengan $z_0 \in D_f$. Fungsi $f(z)$ dikatakan* ***kontinu di*** *z_0 jika*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0),$$

dan fungsi $f(z)$ dikatakan **kontinu di suatu himpunan** $A \subseteq \mathbb{C}$ jika $f(z)$ kontinu di setiap $z \in A$.

Dalam definisi tersebut tersirat adanya tiga syarat yang harus dipenuhi agar suatu fungsi $f(z)$ kontinu di z_0, yaitu:

1. $f(z_0)$ harus terdefinisi
2. $\lim_{z\to z_0} f(z)$ harus ada
3. $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Fungi kompleks *f(z)* dikatakan kontinu pada region *D* jika *f(z)* kontinu pada tiap titik *z* dalam *D*.

Misalkan *f(z) = u(x,y) + iv(x,y)* kontinu di $z_0 = x_0 + iy_0$,

$\Leftrightarrow$ *u(x,y)* dan *v(x,y)* kontinu di (x_0,y_0)

$\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0) \quad dan \quad \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0)$.

Sifat-sifat fungsi kontinu

1) Fungsi konstan kontinu pada bidang kompleks
2) Jika *f* dan *g* kontinu pada daerah *D* maka :
   a) *f+g* kontinu,
   b) *f-g* kontinu ,
   c) *f.g* kontinu,
   d) *f/g* kontinu kecuali di $z_0 \in D$ dan $g(z_0) = 0$

Contoh:

Buktikan f(z) = 3z + 2i kontinu di z = i

Bukti :

1) Dengan menggunakan definisi limit:

   Ambil $\varepsilon > 0$, Pilih $\delta = \left\{ \dfrac{\varepsilon}{3} \right\}$

   $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |z - i| < \delta \ berlaku |f(z) - L| < \varepsilon$

   Maka

   $|f(z) - f(z_0)| = |(3z + 2i) - 5i| = |3z - 3i| = |3(z - i)| < 3\delta$

   Karena $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

   Maka diperoleh $3\delta = \varepsilon$ atau $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$, mengakibatkan nilai limitnya ada. Jadi dapat dikatakan juga bahwa f(z) kontinu di z = i

2) Dengan menggunakan 3 syarat :
   - $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ ada

     $\lim\limits_{z\to zi} f(3z + 2i) = 3i + 2i = 5i$
   - *f(z₀)* ada

     Jika f(z) = 3z + 2i maka f(i) = 3i +2i = 5i (ada)
   - $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

   Sehingga dikatakan bahwa f(z) = 3z + 2i kontinu di z = i

G. Deret Tak Berhingga

Misal $u_1, u_2, u_3, \ldots$ adalah suatu barisan

Maka $S_1 = u_1$,$S_2 = u_1 + u_2$,$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$

$dimana$ S_n adalah jumlah n suku pertama dari barisan u_n

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

$Jika$ $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ ada , maka deret tersebut dikatakan konvergen dan S adalah jumlahnya, dalam hal lain deret tersebut dinamakan divergen.

Syarat deret dikatakan konvergen jika $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Contoh :

Buktikan $1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z}$ jika $|z| < 1$

Bukti :

Ubah deret tersebut menjadi rumus S_n

Maka $S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$

$$\begin{array}{rl} zS_n = & +z + z^2 + \cdots + z^{n-1} + z^n \quad (-) \\ \hline (1-z)S_n = & 1 + z^n \end{array}$$

$$\text{akan diperoleh} \quad S_n = \frac{1 + z^n}{1 - z}$$

deret tersebut akan terbukti apabila $z^n = 0$ sehingga $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$. Dari **hal diatas tersebut** sudah diperoleh bahwa $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ sehingga akan diperoleh $S_n = \frac{1+z^n}{1-z} = \frac{1+0}{1-z} = \frac{1}{1-z}$

jadi terbukti bahwa $1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z}$ jika $|z| < 1$

Kompetensi 2: Soal – Soal latihan untuk diselesaikan !

1. Diketahui $f(z) = x + iy + \frac{x-iy}{x^2+y^2}$. Nyatakan dalam bentuk z
2. Diketahui $f(z) = 2iy - \dfrac{x+iy}{x}$. Tentukan *u* dan *v*
3. Diketahui $f(z) = 2x + \dfrac{x+iy}{y^2}$. Tentukan *f(1+2i)*
4. Jika *f(z) =* z^3 , maka $1 - 3i$
5. Jika $z = 1 + 2i$ maka $f(z) = \frac{x-iy}{1+z}$

6. Jika *z = -3 -5i* maka $f(z) = \frac{1}{|z|}$
7. Misalkan $w = f(z) = z(2 - z)$. Tentukan nilai w yang dinyatakan dengan *z = -7i*
8. Misalkan w= $f(z) = z^4$. Tentukan nilai w_1 dan w_2 , untuk $z_1 = -4 + 4\,i$ dan z_2 = 4 – 0i.
9. Misalkan $w = f(z) = z^4$, gambarlah grafik koordinat setelah ditransformasikan dengan titik z = -2 + i dan z = 1 – 3i, dan tunjukkan bagaimana kaitannya bila dinyatakan secara grafik sebelum transformasi dengan sesudah ditransformasikan!
10. Tentukan dan gambarlah titik cabang dan garis cabang untuk fungsi $w = z^{\frac{1}{3}}$
11. Tentukan dan gambarlah titik cabang dan garis cabang untuk fungsi $w = z^{\frac{1}{4}}$
12. Tentukan dan gambarlah titik cabang dan garis cabang untuk fungsi $w = z^{\frac{1}{6}}$
13. Misalkan *a* dan *b* konstanta kompleks. Buktikan $\lim_{z \to z_0}(az + b) = az_0 + b$ dengan menggunakan definisi limit.
14. Misalkan *a* dan *b* konstanta kompleks. Buktikan $\lim_{z \to z_0}(z^2 + b) = {z_0}^2 + b$ dengan menggunakan definisi limit.
15. Misalkan $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$. Buktikan $\lim_{z \to 0} f(z)$ tidak ada.
16. Tentukan nilai dari $\lim_{z \to 3i} \frac{z^2 + 9}{z - 3i}$
17. Tunjukkan bahwa, Jika $f(z) = -2(z + \frac{1}{3})$ maka $\lim_{z \to i} f(z) = -2i - \frac{2}{3}$.
18. Tunjukkan bahwa, Jika $f(z) = \frac{2z - 3}{\frac{1}{4}z^3}$ maka $\lim_{z \to i} f(z) = -\frac{8i - 12}{i}$.

19. Dengan menggunakan definisi limit, buktikanlah, Jika $f(z)=5z$ maka $\lim_{z\to z_0} f(z)=5z_0$.

20. Jika $f(z)=z^2-2z$ maka $\lim_{z\to i} f(z)=-2i-1$.

21. Buktikan bahwa $\underset{z\to z_0}{Lim}\dfrac{3z^4-2z^3+8z^2-2z+5}{z-i}=4+4z_0$

22. Buktikan bahwa jika $f(z)=4-2z$ maka $\lim_{z\to z_0} f(z)=4-2z_0$

23. Buktikan bahwa jika $f(z)=2+i$ maka $\lim_{z\to i} f(z)=2+i$

24. Buktikan bahwa jika $f(z)=\dfrac{1}{3z}$ maka $\lim_{z\to z_0} f(z)=\dfrac{1}{3z_0}$

25. Buktikan bahwa jika $f(z)=\dfrac{1}{3z-2}$ maka $\lim_{z\to z_0} f(z)=\dfrac{1}{3z_0-2}$

26. Buktikan bahwa jika $f(z)=\dfrac{1}{-z}$ maka $\lim_{z\to z_0} f(z)=\dfrac{1}{-z_0}$

27. Buktikan bahwa jika $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ maka $\lim_{z\to z_0} f(z)=\dfrac{1}{z_0^{\,2}}$

28. Buktikan bahwa jika $f(z)=\dfrac{1}{i}$ maka $\lim_{z\to i} f(z)=\dfrac{1}{i}$

29. Apakah fungsi $f(z)=5-z^4$ kontinu pada z = -2i.

30. Apakah fungsi $f(z)=\dfrac{2}{z^2+1}$ kontinu pada daerah $z=i$

31. Apakah fungsi $f(z)=\dfrac{z^2+4}{z-2i}$ kontinu pada z = z + 3i, dan sebutkan pada titik manakah fungsi tersebut menjadi diskontinu?beri penjelasan!

32. Apakah fungsi $f(z)=\dfrac{3z^4-2z^3+8z^2-2z+5}{z-i}$ kontinu di z = i

33. Jika $u_n=(1+\frac{3z}{n^2})$ buktikan $\lim_{n\to\infty} u_n=1$

34. Jika $u_n=z^n$ buktikan $\lim_{n\to\infty} u_n=0$

BAGIAN 4: PENDIFERENSIALAN KOMPLEKS

A. Turunan

Andaikan $f(z)$ adalah fungsi kompleks, maka turunan $f(z)$ yaitu $f'(z)$ didefinisikan oleh

$$f'(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Dimana $z \to z_0, z - z_0 \neq 0$ atau $z - z_0 = \Delta z$

$z \to z_0$ berarti $(z - z_0) \to 0$ atau $\Delta z \to 0$, sehingga

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Asalkan limit ini ada, yaitu tidak bergantung caranya *Δz→0.* dalam hal ini kita mengatakan bahwa *f(z)* mempunyai turunan (*diferensialable*) di z. Kita sering kali menggunakan *h* sebagai pengganti *Δz.* Turunan suatu fungsi megakibatkan kekontinuanya, tetapi kebalikanya tidak benar. Dengan menggunakan definisi kita dapat menentukan turunan suatu fungsi kompleks.

Aturan turunan pada bilangan riil berlaku juga pada bilangan kompleks.

1. $\frac{d}{dz}(c) = 0$
2. $\frac{d}{dz}(z) = 1$
3. $\frac{d}{dz}[c(f(z)] = cf'(z)$
4. $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}, z \neq 0, n \in \mathrm{Z}$

5. $\frac{d}{dz}\left[f(z)+g(z)\right]= f'(z)+g'(z)$

6. $\frac{d}{dz}\left[f(z)g(z)\right]= f'(z)g(z)+ f(z)g'(z)$

7. $\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{\left[g(z)\right]^2}$

Contoh 1:

Jika $w= f(z)=\frac{1+z}{1-z}$, tentukan *f ‘ (z)* :

Metode 1 :

$$\frac{dw}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\frac{1+(z+\Delta z)}{1-(z+\Delta z)}-\frac{1+z}{1-z}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{2}{(1-z-\Delta z)(1-z)}=\frac{2}{(1-z)^2}$$

Metode 2, dengan menggunakan aturan-aturan pendiferensialan.

Menurut aturan pembagian, maka untuk $z\neq 1$ berlaku

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\frac{(1-z)\frac{d}{dz}(1+z)-(1+z)\frac{d}{dz}(1-z)}{(1-z)^2}$$

$$=\frac{(1-z)(1)-(1+z)(-1)}{(1-z)^2}$$

$$=\frac{2}{(1-z)^2}$$

Sehingga *f ‘ (z)=* $\frac{2}{(1-z)^2}$ *, untuk z≠1*

Aturan Rantai

Misalkan f mempunyai turunan di z_0, dan g mempunyai turunan di $f(z_0)$. Maka fungsi $F(z) = g[f(z)]$ mempunyai turunan di z_0,

Dan $F'(z_0) = g'[f(z_0)].f'(z_0)$.

Dengan kata lain,

jika $w = f(z)$ dan $W = g(w) = F(z)$,

maka menurut aturan rantai $\dfrac{dW}{dz} = \dfrac{dW}{dw}\dfrac{dw}{dz}$

Contoh 2: Tentukan turunan dari fungsi $f(z) = (2z^2 + i)^5$ dengan menggunakan aturan rantai!

Penyelesaian:

Misalkan $w = 2z^2 + I$ dan $W = w^5$.

Maka menurut aturan rantai

$\dfrac{dW}{dz} = \dfrac{dW}{dw}\dfrac{dw}{dz} = (5w^4)(4z) = 20z(2z^2 + i)^4$.

Contoh 3: Tentukan turunan $f(z) = z^2 + 1$ dengan menggunakan definisi turunan

Penyelesaian

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 + 1 - (z^2 + 1)}{\Delta z}$$

$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z(2z_0 + \Delta z)}{\Delta z} = 2z_0.$

Jadi, $f'(z) = 2z_0$

B. Persamaan CR (Cauchy Reimann)

Suatu syarat perlu agar $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitik dalam suatu daerah R adalah u dan v memenuhi persamaan Cauchy Reimann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Jika turunan parsial dalam (2) kontiniu dalam R, maka persamaan Cauchy Reimann adalah syarat cukup agar *f(z)* analitik dalam R.

Persamaan Cauchy – Riemann merupakan persamaan yang sangat penting pada analisis kompleks. Karena persamaan ini digunakan untuk menguji keanalitikan suatu fungsi kompleks

w = f(z) = u (x,y) + iv (x,y).

Definisi Persamaan Cauchy - Riemann

Fungsi *f* dikatakan analitik pada domain *D* jika dan hanya jika turunan parsial pertama dari *u* dan *v* memenuhi persamaan Cauchy Riemann, yaitu $u_x = v_y \quad u_y = -v_x$

dengan

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , u_y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad , v_x = \frac{\partial v}{\partial x} \quad , v_y = \frac{\partial v}{\partial y} .$$

Teorema

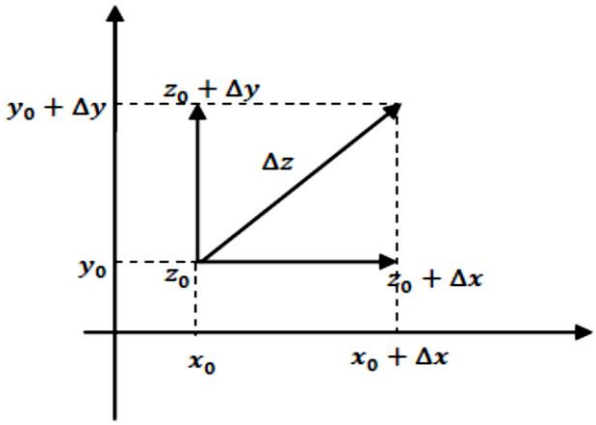
Misalkan *f(z) = u (x,y) + iv (x,y)* terdefinisi dan kontinu di suatu lingkungan dari *z = x + iy* dan mempunyai turunan di *z* maka u_x , v_y , u_y , v_x ada dan memenuhi persamaan Cauchy - Riemann $u_x = v_y \quad u_y = -v_x$.

Teorema

Jika dua fungsi kontinu yang bernilai riil *u(x,y)* dan *v(x,y)* mempunyai turunan parsial pertamanya kontinu dan memenuhi persamaan Cauchy Riemann dalam domain *D* maka fungsi kompleks

f(z) = u (x,y) + iv (x,y) analitik di *D*.

Perhatikan grafik berikut.



Gambar 9. Pendefinisian Cauchy Reamann

Contoh : Misalkan $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

Apakah $f(z)$ analitik untuk semua z ?

Penyelesaian :

$f(z)$ analitik jika memenuhi persamaan Cauchy Riemann, $u_x = v_y \quad u_y = -v_x$.

Perhatikan bahwa

$u = x^2 - y^2$ dan $v = 2xy$.

maka $u_x = 2x = v_y$ dan $u_y = -2y = -v_x$.

karena memenuhi persamaan C-R maka f analitik untuk semua z.

C. Fungsi Analitik

Konsep keanalitikan memerlukan konsep keterdiferensial- an suatu fungsi kompleks yang memerlukan pula konsep limit dan kekontinuan. Oleh karena itu, pada bab ini dibahas konsep-konsep limit dan kekontinuan, diferensial, dan keanalitikan suatu fungsi. Sebelum membahas konsep limit dan kekontinuan perlu dipelajari berbagai terminologi mengenai topologi di bidang kompleks yang mendasari pembahasan konsep-konsep tersebut.

Definisi Fungsi Analtik	Fungsi *f(z)* disebut analitik (atau holomorfik atau reguler atau monogenik) di titik z_0 apabila *f'(z)* ada di semua titik pada suatu lingkungan z_0.

Misal *f(z) = u(x,y) + iv(x,y)*. Andaikan

1. u_x , v_y , u_y , v_x kontinu di semua titik dalam lingkungan tertentu *N* dari titik z_0
2. Persamaan Cauchy Riemann $u_x = v_y \quad u_y = -v_x$ berlaku di setiap titik di *N*

maka *f(z)* analitik di z_0.

Contoh 1:

Tunjukkan bahwa $\frac{d}{dz}\bar{z}$ tidak analitik atau dengan kata lain limit f(z) = $\bar{z}$ tidak ada !

Penyelesaian :

Menurut definisi, $\frac{d}{dz} f(z) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$

jika limit ini ada dan tidak bergantung dari caranya $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ mendekatinol.

Maka

$$\frac{d}{dz}\bar{z} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\overline{z+\Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\overline{x+iy+\Delta x+iy} - \overline{x+iy}}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{x - iy + \Delta x - i\Delta y - (x - iy)}{\Delta x = i\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

jika $\Delta y = 0,$ maka limitnya adalah $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$

jika $\Delta x = 0,$ maka limitnya adalah $\lim_{\Delta y \to 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1$

karena limitnya bergantung pada cara $\Delta z \to 0,$ maka turunannya tidak ada, yaitu $f(z) = \bar{z}$ tidak analitik dimana-mana.

Definisi Titik Singular	Titik z_0 dinamakan titik singular bagi f (z) jika dan hanya jika *f (z)* gagal menjadi analitik pada z_0 tetapi setiap lingkungan z_0 memuat paling sedikit satu titik yang membuat *f(z)* analitik.

Contoh 2 :

Misalkan $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^3+z}$. Tentukan titik singular dari *f(z)* dan tentukan dimana saja *f(z)* analitik!

Penyelesaian:

f'(z) ada di semua *z* kecuali di $z^3 + z = 0$ atau di $z = 0$ dan di $z = \pm i$. Sehingga titik singular dari *f* (z) adalah di $z = 0$ dan di $z = \pm i$.

f(z) analitik di semua *z* kecuali di $z^3 + z = 0$ atau di $z = 0$ dan di $z = \pm i$.

D. Fungsi Harmonik

Andaikan terdapat suatu fungsi kompleks $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Dari persamaan Cauchy-Riemann

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ .....(1)

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ .....(2)

Jika pers (1) didiferensialkan terhadap *x* diperoleh

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ .....(3)

Jika pers (1) didiferensialkan terhadap *y* diperoleh

$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial v}{\partial^2 y}$ .....(4)

Jika pers (2) didiferensialkan terhadap *x* diperoleh

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ .....(5)

Jika pers (2) didiferensialkan terhadap *y* diperoleh

$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial u}{\partial y^2}$ .....(6)

Jadi, jika turunan parsial kedua dari *u* dan *v* terhadap *x* dan *y* ada dan kontinu dala suatu daerah $\mathbb{R}$ maka

Dari pers (3) dan (6) diperoleh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Dari pers (4) dan (5) diperoleh

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Persamaan diatas disebut dengan persamaan Laplace. Fungsi dimana $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ memenuhi persamaan Laplace dalam suatu daerah $\mathbb{R}$ dinamakan fungsi harmonik dan dikatakan harmonik dalam $\mathbb{R}$.

Contoh 1: Misalkan $u(x,y) = x^2 - y^2$ dan $v(x,y) = 2xy$. Apakah *u* dan *v* fungsi harmonik?

Penyelesaian: Perhatikan bahwa:

$u_x=2x$	$v_x=2y$	$u_{xy}=0$	$v_{xy}=2$
$u_y=-2y$	$v_y=2x$	$u_{yx}=0$	$v_{yx}=2$
$u_{xx}=2$	$v_{xx}=0$	$u_{yy}=-2$	$v_{yy}=0$

Karena $u_x = 2x = v_y$, $u_y = -2y = -v_x$, $u_{xx} + u_{yy} = 2 + (-2) = 0$ dan $v_{xx} + v_{yy} = 0 + 0 = 0$ dimana *u* dan *v* memenuhi persamaan Laplace maka *u* dan *v* fungsi harmonik.

Definisi Fungsi Harmonik Sekawan Misalkan $f(z) = u + iv$. *v* disebut fungsi harmonik sekawan dari *u* jika *u* fungsi harmonik dan *v* fungsi harmonik.

Contoh 2: Misalkan $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$. Tentukan fungsi harmonik sekawan dari u.

Penyelesaian:

$u_x = -6xy$ dan $u_y = 3y^2 - 3x^2$. Menurut persamaan cauchy – Riemann diperoleh $-6xy = u_x = v_y$.

Sehingga

$$v(x,y) = \int (-6xy)dy = -3xy^2 + h(x) \text{ .....(1)}$$

atau $v_x = -3y^2 + h'(x)$.

Syarat persamaan Cauchy – Riemann yang kedua harus dipenuhi, yaitu $u_y = -v_x$.

Sehingga

$$\begin{aligned} 3y^2 - 3x^2 &= -\left[-3y^2 + h(x)\right] \\ 3y^2 - 3x^2 &= 3y^2 - h(x) \\ h'(x) &= 3x^2 \\ h(x) &= \int 3x^2 dx = x^3 + c \end{aligned} \quad \text{.....(2)}$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + c$ yang merupakan fungsi harmonik sekawan dari u.

E. Aturan L' Hospital

Misalkan f (z) dan g (z) analitik dalam suatu daerahyang memuai titik z_0 dan andaikan $f(z_0) = g(z_0) = 0$ tetapi $g'(z_0) \neq 0$. Maka aturan L'Hospital menyatakan;

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Catatan : dalam kasus $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$, aturan ini masih dapat diperluas yaitu dengan memggunakan aturan L'Hospital sampai dua kali.

Contoh :

Hitunglah $\lim_{z \to i} \frac{z^{10}+1}{z^6+1}$

Penyelesaian :

Jika f (z) = $z^{10}+1$ dan g (z) = z^6+1, maka f (i) = g (i) = 0

juga f (z) dan g (z) analitik di z = i ,

oleh karena itu menurut aturan L'Hospital :

$$\lim_{z \to i} \frac{z^{10}+1}{z^6+1} = \lim_{z \to i} \frac{10z^9}{6z^5} = \lim_{z \to i} \frac{5}{3} z^4 = \frac{5}{3}$$

F. Operator Diferensial Kompleks

Kita mendefinisikan ∇ (*del*) dan $\overline{\nabla}$ (*del bar*) dengan :

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial z}$, $\overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial z}$

Operator $\overline{\nabla}$ memungkinkan untuk mendefinisikan operasi gradien. Dalam semua kasus F(*x,y*) dipandang sebagai suatu fungsi riil yang memiliki turunan kontinu terhadap x dan y (skalar), sedangkan A(x,y) = P(x,y) + *i* Q (x,y) adalah suatu fungsi kompleks yang memiliki turunan kontinu terhadap x dan y (vektor).

1. Gradien

Kita mendefinisikan gradien dari suatu fungsi riil F (skalar) sehingga

Gradien F= ∇F = $\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} = 2 \frac{\partial G}{\partial i}$

Secara ilmu ukur ini menyatakan suatu fektor normal pada kurva F (x,y) = c dimana c suatu konstanta.

Dengan cara yang sama gradien suatu fungsi kompleks

A= P + *i* Q (vektor) didefinisikan sebagai

gradien A = ∇A = $\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$(P + *i* Q)

$$= \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial B}{\partial i}$$

Khususnya,jika B suatu fungsi analitik dari Z maka $\frac{\partial B}{\partial i}$=0, sehingga gradiennya nol, yaitu $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$

Contoh:

1. Misal F = $-4x^3y^2 + 3ix^2y^5$ tentukan gradiennya F!

   Grad F = ∇F = $\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ $(-4x^3y^2 + 3ix^2y^5)$

   $= \frac{\partial i}{\partial x}(-4x^3y^2) + \frac{\partial}{\partial x}(3ix^2y^5) + i\frac{\partial}{\partial y}(-4x^3y^2) + \frac{-\partial}{\partial y}(3x^2y^5)$

   $= -12x^2y^2 + 6ixy^5 - 8ix^3y - 15x^2y^4$

   $= -12x^3y^2 - 15x^2y^4 + i\,(6xy^5 - 8x^3y)$

2. grad A = ∇A = $\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ $(2xy - ix^2y^3)$

   $= \frac{\partial}{\partial x}(2xy - ix^2y^3) + i\frac{\partial}{\partial y}(2xy - ix^2y^3)$

   $= 2y - 2ixy^3 + i(2x - 3ix^2y^2) = 2y + 3x^2y^2 + i\,(2x - 2xy^3)$

2. Divergensi

Divergensi didefinisikan suatu fungsi kompleks (vektor) sebagai :

divergen $A = \nabla \circ A = \mathrm{Re}\{\overline{\nabla} A\}$

dengan $A(x, y) = p(x, y) + iQ(x, y)$

$A \quad = p + iQ$

$$\nabla \quad = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial \overline{Z}}$$

$$\overline{\nabla} \quad = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial Z}$$

Maka div $A = \nabla \circ A = \mathrm{Re}\{\overline{\nabla} A\}$

$$= \mathrm{Re}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P + iQ)\right\}$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial Q} + i\frac{\partial Q}{\partial x} - i\frac{\partial P}{\partial y} - i^2\frac{\partial Q}{\partial y}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \left(i\frac{\partial Q}{\partial x} - i\frac{P}{\partial y}\right) + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) = 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial A}{\partial Z}\right\}$$

Divergensi suatu fungsi kompleks atau riil senantiasa merupakan suatu fungsi riil.

Contoh :

Jika $A(x, y) = 2xy - ix^2y^3$; tentukan divergen dari *A*

$$\text{div } A = \nabla \circ A = \mathrm{Re}\{\overline{\nabla} A\} = \mathrm{Re}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\partial xy - ix^2y^3\right)\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2xy) + i^2\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y^3\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2xy) - \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y^3\right)$$

$$= 2y - 3x^2y^2$$

3. Curl

Dengan menggunakan definisi hasilkali silang dari dua bilangan kompleks, kita mendefinisikan Curl suatu fungsi kompleks sebagai

$$Curl\ A = \nabla\ XA = Im\ \left\{\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\ (P + iQ)\right\}$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2\ Im\left\{\frac{\partial B}{\partial z}\right\}$$

Dengan cara yang sama kita dapat mendefinisikan curl suatu fungsi riil.

Contoh :
Jika A(x,y) = 2xy – ix^2y^3, tentukan laplacian dari A
Jawab :

$$\begin{aligned}\text{Curl A} = \ \nabla \times A &= \text{Im}\ \{\overline{\nabla}\ A\} \\ &= \text{Im}\ \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\ \frac{\partial}{\partial y}\right)(2xy - ix^2y^3)\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(-x^2y^3) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy) \\ &= -2xy^3 - 2x\end{aligned}$$

4. Laplacian

Sebelumya kita telah mendefinisikan operator ∇ (del) dengan

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \overline{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial z}$$

Di mana definisi yang setara dalam suku-suku koordinat sekawan z dan ż berlaku.
Operator laplace didefinisikan sebagai hasilkali titik dari dengan dirinya sendiri, yaitu

$$\nabla \circ \nabla = \text{Re}\left\{\{\overline{\nabla}\nabla\}\right\} = \text{Re}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right\}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

Perhatikan bahwa jika A analitik, $\nabla^2 A = 0, \nabla^2 P = 0$ dan $\nabla^2 Q = 0$ maka P dan Q harmonik.

Contoh:
Jika A (x, y) = $7x^2y$ – ix^3y^2, Laplacian dari A adalah?
Penyelesaian:

Laplacian A =

$$\nabla^2 A = \text{Re}\left\{\overline{\nabla} A\right\} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(7x^2y - ix^3y^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(7x^2y - ix^3y^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(14xy - 3ix^2y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(7x^2 - 2ix^3y) = 14y - 6ixy^2 - 2ix^3$$

Kompetensi 3: Soal – Soal latihan untuk diselesaikan !

1. Tentukan $f'(z)$ pada persamaan $f(z) = (1+3z)^2$
2. Tentukan $f'(z)$ pada persamaan $f(z) = (2-z^2)^2$
3. Tentukan $f'(z)$ pada persamaan $f(z) = \dfrac{z^2}{2-z}$
4. Tentukan $f'(z)$ pada persamaan $f(z) = \dfrac{z^2-3z}{z^2}$
5. Dengan menggunakan definisi turunan tentukan *f(z)* = $z^3 - 2z$
6. Dengan menggunakan definisi turunan tentukan *f(z)* = $\dfrac{-2}{z}$
7. Dengan menggunakan definisi turunan tentukan *f(z)* = $\dfrac{-z+1}{z^2}$
8. Dengan menggunakan definisi turunan tentukan f(z) = $\dfrac{2}{z^2}$
9. Apakah *f(z)* = z^3 analitik?
10. Misalkan $f(z) = \dfrac{-z+1}{z^2}$, apakah *f(z)* analitik?
11. Misalkan $f(z) = \dfrac{z^3+1}{z^2+1}$, apakah *f(z)* analitik?
12. Misalkan $f(z) = \dfrac{z^2-z+1}{1-z^2}$, apakah *f(z)* analitik?
13. Diketahui $w = f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$, tentukan $\dfrac{dw}{dz}$ dan di mana $f(z)$ tidak analitik
14. Jika v(x,y) didefinisikan sebagai fungsi harmonik sekawan dari u(x,y). Selidikilah apakah fungsi $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ berikut merupakan fungsi Harmonik ? Kemudian tentukan v(x,y) sehingga f(x,y)=u(x,y) + v(x,y) analitik!
15. Misalkan $v = \left(x^2 - y^2\right)^2$. Apakah fungsi tersebut harmonik? Jika ya, tentukan fungsi analitik sekawan dari *f(z) = u (x,y) + iv (x,y).*

16. Jika v(x,y) didefinisikan sebagai fungsi harmonik sekawan dari u(x,y). selidikilah apakah fungsi $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$ merupakan fungsi Harmonik ? kemudian tentukan v(x,y) sehingga f(z)=u(x,y) + v(x,y) analitik.
17. Jika v(x,y) didefinisikan sebagai fungsi harmonik sekawan dari u(x,y). selidikilah apakah fungsi $u(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ merupakan fungsi Harmonik ? kemudian tentukan v(x,y) sehingga f(z)=u(x,y) + v(x,y) analitik.
18. Hitunglah $\lim_{z \to 0} \frac{1 - \cos z}{z^2}$
19. Diketahui A(x,y)$= 2xy - ix^2y^3$, tentukan Gradian A
20. Jika $A = (3x^2y - ixy^2)$; tentukan divergen dari *A*
21. Jika $A = (-3x^2y + i4xy^2)$; tentukan Curl dari *A*
22. Misalkan $B = 3z^2 + 4\bar{z}$. Tentukan Curl B ?
23. Misal M = $(-4x^2y^2 + 3ix^2y^5)$, tentukan laplacian M !
24. Jika diketahui $|z_1| = \sqrt{9x^2 - 16y^2}$ dan $|z_2| = \sqrt{3y^2 - 4x^2}$ tentukanlah Lap $\frac{z_1}{z_2}$
25. Misal H = 2 Cos $(3x^2y^5)$. Tentukan Divergensi H

PENGINTEGRALAN KOMPLEKS

A. Integral Fungsi Kompleks sebagai Integral Garis

Misalkan *C* adalah lintasan di bidang kompleks dan fungsi *f*(*z*) = *u*(*z*) + *i v*(*z*) terdefinisi di lintasan *C*. Akan ditentukan $\int_C f(z)dz$ dan sifat-sifatnya.

Definisi Integral Fungsi Kompleks:

Pendefinisian integral fungsi kompleks serupa dengan pendefinisian integral fungsi real, yaitu dengan mengganti selang pengintegralan oleh suatu lintasan. Misalkan *C* adalah lintasan yang menghubungkan z_0 dan z^* dan *f*(*z*) terdefinisi di *C*. Integral fungsi *f*(*z*) sepanjang lintasan *C* didefinisikan sebagai

$$\int_C f(z)dz = \lim_{\mu \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

Dengan μ menyatakan panjang maksimum dari busur $z_k - z_{k-1}$ dari partisi yang didefinisikan pada *C*, yaitu $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n = z^*$, dan ζ_k adalah sebarang bilangan kompleks yang terletak pada busur $z_k - z_{k-1}$.

Jika limit tersebut ada, maka dikatakan *f*(*z*) terintegralkan sepanjang lintasan pengintegralan *C*. Teorema berikut menyatakan syarat yang harus dipenuhi oleh *f*(*z*) agar terintegralkan dan bagaimana cara menghitung nilai integralnya.

Teorema Eksistensi Integral Fungsi Kompleks:

Jika *f*(*z*) = *u*(*x*, *y*) + *i v*(*x*, *y*) kontinu di setiap titik pada kura mulus *C*: $x = \psi(t), y(t) = \xi(t), t \in [a,b]$ maka $\int_C f(z)dz$ ada

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - \int_C vdy + i\int_C udy + i\int_C vdx =$$

$$\int_a^b (ux' - vy' + i(vx' + uy'))dt$$

Sifat-sifat Integral Kompleks:

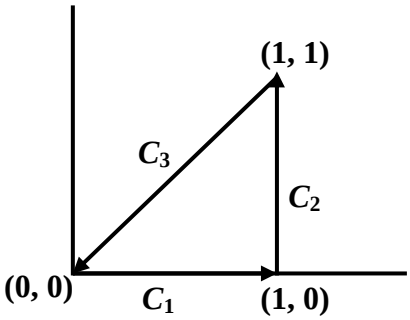
Misalkan k adalah sebarang konstanta kompleks, $C + K$ adalah lintasan yang terdiri dari dua kurva mulus C dan K, dan $f(z)$ maupun $g(z)$ terintegralkan sepanjang kurva C dan K.

Maka

1. $\int_C kf(z)dz = k\int_C f(z)dz$
2. $\int_C (f(z) + g(z))dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$
3. $\int_{C+K} f(z)dz = \int_C f(z)dz + \int_K f(z)dz$
4. $\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$
5. Jika $f(z)$ terbatas di C, yaitu terdapat $M \in \Re$ sehingga $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in C$ dan jika panjang lintasan C adalah L maka $\left|\int_C f(z)dz\right| \leq ML$.

Contoh 1

Hitung $\int_C f(z)dz$ jika $f(z) = x$, dan $C = C_1 + C_2 + C_3$, dengan C_1 adalah ruas garis dari (0, 0) ke (1, 0), C_2 adalah ruas garis dari (1, 0) ke (1, !), dan C_3 adalah ruas garis dari (1, 1) ke (0, 0) seperti diberikan pada Gambar 4.4.



Gambar 11. Lintasan C

Jawab:

Berdasarkan cara merumuskan lintasan *C*, soal ini dapat dikerjakan dengan beberapa cara. Di sini diberikan tiga cara yang menghasilkan nilai yang sama.

Cara 1

$$C_1 : x = t,\ \ y = 0,\ \ t \in [0,\ 1] \Rightarrow x' = 1, y' = 0$$

$$C_2 : x = 1,\ \ y = t,\ \ t \in [0,\ 1] \Rightarrow x' = 0, y' = 1$$

$$C_3 : x = -t,\ \ y = -t,\ \ t \in [-1,\ 0] \Rightarrow x' = -1, y' = -1$$

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz$$

$$= \int_0^1 x(x'+iy')dt + \int_0^1 x(x'+iy')dt + \int_{-1}^0 x(x'+iy')dt$$

$$= \int_0^1 t(1+0)dt + \int_0^1 1(0+i)dt + \int_{-1}^0 -t(-1-i)dt$$

$$= \int_0^1 (t+i)dt + (1+i)\int_{-1}^0 t\,dt$$

$$= (\frac{1}{2}t^2 + i\,t)\,|_0^1 + ((1+i)\frac{1}{2}t^2)\,|_{-1}^0$$

$$= \frac{1}{2} + i - (\frac{1+i}{2}) = \frac{i}{2}$$

Cara 2

$$C_1 : x = t,\ \ y = 0,\ \ t \in [0,\ 1]$$

$$C_2 : x = 1,\ \ y = t,\ \ t \in [0,\ 1]$$

$$C_3 : x = 1-t,\ \ y = 1-t,\ \ t \in [0,\ 1]$$

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz$$

$$= \int_0^1 x(x'+iy')dt + \int_0^1 x(x'+iy')dt + \int_0^1 x(x'+iy')dt$$

$$= \int_0^1 t(1+0)dt + \int_0^1 1(0+i)dt + \int_0^1 (1-t)(-1-i)dt$$

$$= \int_0^1 (t+i)dt - \int_0^1 (1-t)(1+i)\, dt$$

$$= (\frac{1}{2}t^2 + i\,t)\,|_0^1 - (1+i)\int_0^1 (1-t)dt$$

$$= (\frac{1}{2}+i) - (1+i)[t - \frac{1}{2}t^2\,|_0^1]$$

$$= (\frac{1}{2}+i) - (1+i)(1-\frac{1}{2})$$

$$= (\frac{1}{2}+i) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{i}{2}$$

Cara 3

$C_1 : y = 0,\ x \in [0,\ 1]$

$C_2 : x = 1,\ y \in [0,\ 1]$

$-C_3 : y = x, x \in [0,\ 1]$

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz - \int_{C_3} f(z)dz$$

$$= \int_0^1 x(x'+iy')dt + \int_0^1 1(x'+iy')dt - \int_0^1 x(x'+iy')dt$$

$$= \int_0^1 x(dx + i.0\, dt) + \int_0^1 1(0\, dt + i\, dy) - \int_0^1 x(dx + idx)$$

$$= \int_0^1 x\, dx + i\int_0^1 dy - \int_0^1 x(1+i)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\,|_0^1 + i.y\,|_0^1 - (1+i)\frac{1}{2}x^2\,|_0^1$$

$$= (\frac{1}{2}+i) - (\frac{1+i}{2}) = \frac{i}{2}$$

Contoh soal 2:

Jika *C* adalah lingkaran berpusat di z_0 berjari-jari *r* yang berorientasi positif. Hitunglah $\int_C \frac{dz}{z - z_0}$

Jawab:

Cara 1

Parametrisasi: Misalkan $z_0 = a + ib$ maka $x = r \cos t + a$, $y = r \sin t + b, t \in [0, 2\pi]$.

Jadi

$$\int \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{(x' + iy')dt}{(r\cos t + a + (r\sin t + b)i - (a + ib)}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(-r\sin t + ir\cos t)dt}{(r\cos t + ir\sin t)}$$

$$= \int_0^{2\pi} i\frac{(ir\sin t + r\cos t)dt}{(r\cos t + ir\sin t)}$$

$$= \int_0^{2\pi} i\, dti\, t\,|_0^{2\pi} = 2\pi\, i\,.$$

Cara 2 Lintasan *C* dapat dinyakan pula sebagai *C*: $z = z_0 + re^{it}, t \in [0,\ 2\pi]$ sehingga $z - z_0 = r\, e^{it}$ dan $dz = i\, r\, e^{it}$ dt. Akibatnya

$$\int_C \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{i\, r\, e^{it}}{r\, e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = i\, t\,|_0^{2\pi} = 2\pi\, i\,.$$

Jadi, jika *C* adalah lingkaran yang berpusat di z_0 berorientasi positif (+), maka $\int_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi\, i$

B. Rumus Integrasi Cauchy:

Jika C adalah lintasan tertutup sederhana berorientasi positif, $g(z)$ analitik di C dan di $Int(C)$, dan $z_0 \in Int(C)$ maka:

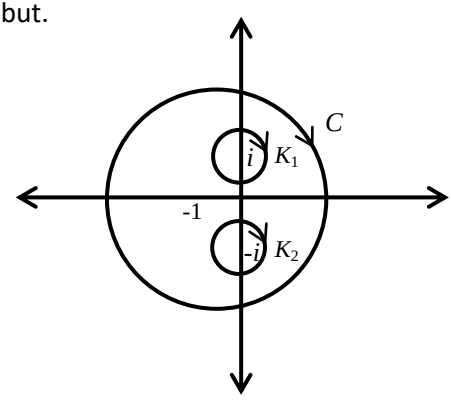
$$\int_C \frac{g(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i g(z_0)$$

atau

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(z)}{z - z_0} dz \, .$$

Contoh: Jika C: $|z + 1| = 6$ lintasan berorientasi negatif, hitunglah $\int_C \frac{2iz^3}{z^2 + 1} dz$

Jawab: Soal ini diselesaikan dengan menggunakan dua cara. Cara pertama tidak menggunakan rumus integrasi Cauchy, sedangkan cara ke dua menggunakan rumus integrasi Cauchy. Kedua cara tersebut memanfaatkan teorema annulus ganda sebab $f(z)$ tidak analitik di $z = i$ dan $z = -i$ seperti diilustrasikan pada Gambar 5.3. Jika dibentuk annulus ganda $Ann(C, K_1, K_2)$, dengan $K_1 : |z - i| < \frac{1}{2}$ dan $K_2 : |z + i| < \frac{1}{2}$ keduanya berorientasi negatif, maka $f(z)$ analitik di annulus tersebut.



Gambar 12. Lintasan C Dilengkapi Annulus Berganda

Cara 1:

$$\int_C \frac{2iz^3}{z^2+1}dz = 2i\int_C \frac{z^3+z-z}{z^2+1}dz = 2i\int_C z\frac{z^2+1-1}{z^2+1}dz$$

$$= 2i\int_C z\left(1-\frac{1}{z^2+1}\right)dz = 2i\int_C (z-\frac{z}{(z-i)(z+i)})dz$$

$$= 2i\left(\int_C zdz - \int_C (\frac{\frac{1}{2}}{(z-i)}+\frac{\frac{1}{2}}{(z+i)})dz\right)$$

$$= 2i\left(0-\left(\int_{K_1}(\frac{\frac{1}{2}}{(z-i)}+\frac{\frac{1}{2}}{(z+i)})\right)dz + \int_{K_2}\left((\frac{\frac{1}{2}}{(z-i)}+\frac{\frac{1}{2}}{(z+i)})dz\right)\right)$$

$$= 2i\left(0-\left((-\frac{1}{2}2\pi i+0)+(0-\frac{1}{2}2\pi i\right)\right) = -4\pi$$

Cara 2:

$$\int_C \frac{2iz^3}{z^2+1}dz = 2i\int_C \frac{z^3}{z^2+1}dz = 2i\int_C (\frac{z^3}{(z+i)(z-i)})dz$$

$$= 2i\left(\int_{K_1}\frac{z^3}{(z+i)(z-i)}dz + \int_{K_2}\frac{z^3}{(z+i)(z-i)}dz\right)$$

$$= 2i\left(\int_{K_1}\frac{\frac{z^3}{z+i}}{z-i}dz + \int_{K_2}\frac{\frac{z^3}{z-i}}{z+i}dz\right)$$

$$= 2i\left(-2\pi\, i\,\frac{z^3}{z+i}\bigg|_{z=i} + (-2\pi\, i)\,\frac{z^3}{z-i}\bigg|_{z=i}\right)$$

$$= 2i\left(-2\pi i\frac{i^3}{i+i} + (-2\pi i)\frac{(-i)^3}{-i-i}\right)$$

$$= 2i\left(-2\pi i\frac{i^3}{2i} + (-2\pi i)\frac{(-i)^3}{-2i}\right)$$

$$= 2i(\pi i + \pi i) = -4\pi$$

C. Rumus Integrasi Cauchy yang Diperumum:

Jika C lintasan tertutup sederhana berorientasi (+), $g(z)$ analitik di C dan di $Int(C)$ dan $z_0 \in Int(C)$ maka:

$$g^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

atau

$$\int_C \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = 2\pi i\,\frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}\,.$$

Contoh:

Jika C: $|z+1| = 6$ adalah lintasan berorientasi negatif, hitunglah $\int_C \frac{2iz^3}{(z^2+1)^2}dz$

Jawab:

$$\int_C \frac{2iz^3}{(z^2+1)^2}\,dz = 2i\int_C \frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2}\,dz$$

Seperti pada soalsebelumnya, soal ini dapat diselesaikan menggunakan teorema annulus berganda dengan K_1: $|z - i| = 0.5$ dan K_2: $|z + i| = 0.5$, dimana K_1 dan K_2 berorientasi negatif. Namun disini digunakan Rumus Integrasi Cauchy yang Diperumum karena pangkat penyebut lebih dari 1, sehingga dalam rumus integrasi Cauchy disini $n = 1$, $z_0 = -i$, dan $z_0 = i$.

$$2i\int_C \frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2}\,dz = 2i\left(\int_{K_1} \frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2}\,dz + \int_{K_2} \frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2}\,dz\right)$$

$$= 2i\left(\int_{K_1} \frac{\frac{z^3}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}\,dz + \int_{K_2} \frac{\frac{z^3}{(z-i)^2}}{(z+i)^2}\,dz\right)$$

$$= 2i\left((-2\pi i)\frac{\frac{3z^2(z+i)^2-2z^3(z+i)}{(z+i)^4}}{1!}\Bigg|_{z=i} + (-2\pi i)\frac{\frac{3z^2(z-i)^2-2z^3(z-i)}{(z-i)^4}}{1!}\Bigg|_{z=-i}\right)$$

$$= 2i\left((-2\pi i)\frac{-3(-4)-(-i)(4i)}{16.1} + (-2\pi i)\frac{-3(-4)-(-i)(-4i)}{16.1}\right)$$

$$= 2i\left((-2\pi i)\frac{12-4}{16} - 2\pi i\frac{12+4}{16}\right) = 2i(-2\pi i)\left(\frac{8}{16}+\frac{16}{16}\right)$$

$$= 6\pi$$

Kompetensi 4: Soal – Soal latihan untuk diselesaikan !

1. Jika *C* adalah lintasan yang terdiri dari ruas garis dari (0, 0) ke (1, 1) dan ruas garis dari (1, 1) ke (1, 0), perlihatkan bahwa $\int_C |z|^2 dz = \frac{2}{3}$
2. Jika *C*: $x = t^2$, $y = \frac{1}{t}$, $1 \le t \le 3$, hitunglah $\int_C (x^2 + y^2)dz$
3. Jika $C = C_1 + C_2 + C_3$ seperti diperlihatkan pada Gambar 4.5, hitunglah $\int_C \bar{z}dz$
4. Hitunglah $\int_C e^z dz$ sepanjang lintasan $y = 2x$ dari (–1, –2) sampai dengan (1, 2)
5. Integralkan fungsi $f(z) = (\bar{z})^2$ sepanjang lintasa $y = x^2$ dari (0, 0) ke (1, 1)
6. $f(z) = \frac{2}{z^2-1}, C: |z-1| = \frac{1}{2}$, orientasi negatif.
7. $f(z) = \frac{4}{z+1} + \frac{3}{z+2i}$, *C*: $|z| = 4$ berorientasi positif.
8. $f(z) = \frac{2i}{z^2+1}$, *C*: $|z-1| = 6$ berorientasi positif.
9. $z^2 + 3 + \frac{4}{z}$, *C*: $|z| = 4$ berorientasi negatif.
10. $f(z) = \frac{3z^4}{z-6i}$, *C*: $|z| = 10$, orientasi positif.

DAFTAR PUSTAKA

Barron, M dan Young, Karen Romano. 1995. *Ready, Set, Count*. New York:Skylight Press Book.

Churchil, R.V, 2009, Complex Variable & Application 8th edition, Mc Graw-Hill.

Gunawan.2009. *Pengantar Analisis Fourier dan Teori Aproksimasi*.http://personal.fmipa.itb.ac.id/hgunawan/files/2009/02/bab0-b.pdf. [21- 05- 2009].

https://mathcyber1997.com/soal-dan-pembahasan-analisis-kompleks-tingkat-dasar/

http://rumus-matematika.com/berkenalan-dengan-bilangan-komplek/

Jack D, Wilson.1967. *Elementary mathematics A Modern Approach*. New York: Mc. Graw Hill Book Company.

Kusumawinahyu. 2014. *Fungsi Kompleks*. Universitas Brawijaya

Mutaqin. 2008. *Bilangan Kompleks*.Untirta: Jakarta.

Russefendi. 1982. *Dasar Dasar Matematika Modern Untuk Guru*. Bandung: Tarsito.

Spiegel. 1987. *Seri Buku Schaum Teori dan Soal-soal Peubah Kompleks*. Erlangga: Jakarta.

Stupiansky, Nicholas. 1992. *Learning Through Play Math*. New York: Scholastic Inc. early Childhood Division.

ISBN 978-623-8087-06-8

9 786238 087068